

---

# Stabilité des barres en section I doublement symétrique soumises à un effort normal, de la flexion bi-axiale et de la torsion

---

Article

---

par André Beyer, chef de projet recherche, CTICM, Alain Bureau, chef du service recherche construction métallique, CTICM,  
Nicolas Boissonnade, professeur, université Laval, et Abdelouahab Khelil, professeur, université de Lorraine

## RÉSUMÉ

La Partie 1-1 de l'Eurocode 3 définit, entre autre, la résistance des barres et de la section transversale vis-à-vis des différents efforts internes. Cependant, la version actuelle de cette norme ne donne pas des règles claires et pratiques concernant le traitement de la résistance des barres à section ouverte soumises à de la torsion. C'est pourquoi un projet de recherche a été réalisé au CTICM avec l'objectif d'étudier le comportement des barres et leur résistance en interaction entre la flexion bi-axial, l'effort normal et la torsion. Un premier article a été publié récemment concernant la résistance de la section transversale. Ce deuxième article présente les résultats du projet de recherche concernant la stabilité de la barre. Tout d'abord, nous abordons les bases théoriques des formules d'interaction ne tenant pas compte de la torsion. Ensuite, une extension des formules d'interaction est développée analytiquement. Finalement, cette proposition est validée par rapport à une étude paramétrique réalisée à l'aide de simulations numériques.

## ABSTRACT

*Part 1-1 of Eurocode 3 defines, amongst others, the cross section and the member resistance with respect to the different internal forces and moments. However, the current version of this standard does not give clear and practical provisions concerning the treatment of members of open cross section in presence of torsion. Therefore, a research project has been realised at CTICM with the objective to study the behaviour and the resistance of members subject to a combination of bi-axial bending, axial forces and torsion. A first article has been published recently concerning the plastic section resistance. This second article presents the results of the research project concerning the stability of members. First, the theoretical basis of existing interaction formulae is recalled. Then, an extension of the interaction equations is derived analytically. Finally, the proposal is validated based on a parametrical study using numerical simulations.*

# 1 | INTRODUCTION

La stabilité des barres métalliques est dans la majorité des cas vérifiée à l'aide des formules d'interaction (6.61) et (6.62) de la Partie 1-1 de l'Eurocode 3 [1]. Ces formules sont rappelées ci-dessous.

$$(6.61) : \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk} / \gamma_{M1}} + k_{yz} \frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{M_{z,Rk} / \gamma_{M1}} \leq 1,0 \quad (1)$$

$$(6.62) : \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk} / \gamma_{M1}} + k_{zz} \frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{M_{z,Rk} / \gamma_{M1}} \leq 1,0 \quad (2)$$

On peut noter que les termes  $\Delta M_{y,Ed}$  et  $\Delta M_{z,Ed}$  sont associés à l'instabilité locale de voilement et qu'ils s'annulent pour les sections doublement symétriques si la méthode directe est appliquée pour la détermination des caractéristiques efficaces d'une section de classe 4 (voir références [2] et [10] et §4.3 (3) et (4) de l'EN 1993-1-5 [10]). Les formules d'interaction des équations (1) et (2) contiennent des termes liés à l'effort normal et aux moments de flexion. En revanche, l'effet de la torsion ne peut pas être traité. Par ailleurs, on peut rappeler que la majorité des logiciels d'analyse n'intègre pas tous les effets liés à la torsion. En particulier, le gauchissement est généralement négligé. Afin d'obtenir des résultats fiables des efforts internes et des déplacements pour les barres métalliques, il est alors nécessaires de se baser sur des formulaires (par exemple la référence [19]) ou sur des logiciels spécialisés comme par exemple « TORSION » téléchargeable gratuitement sur le site internet du CTICM.

On peut admettre qu'il est préférable d'éviter au maximum des charges de torsion sur les sections métalliques, notamment les sections ouvertes. Toutefois, dans certains cas, comme les poutres de roulements, la torsion ne peut pas être évitée. Malgré ce fait, la version actuelle de la Partie 1-1 de l'Eurocode 3 ne définit pas clairement une méthode de vérification de la résistance des barres soumises à de la torsion. C'est pourquoi, un projet de recherche a été conduit au CTICM avec l'objectif de développer une extension des formules d'interaction. Ce projet de recherche a donné lieu à la thèse de doctorat de la référence [3]. Dans la référence [4], les résultats de cette thèse concernant l'interaction plastique en section ont été présentés et de nouvelles formules d'interaction ont été proposées. Ces formules d'interaction représentent la résistance limite des barres suffisamment courtes, de section compacte (de classe 1 ou 2 selon la notation de l'Eurocode 3), dont le comportement n'est pas influencé par l'effet de l'instabilité (flambement, déversement). Dans cet article, nous présentons les résultats du projet de recherche concernant la stabilité des barres à section en I doublement symétrique. Tout d'abord, nous rappelons les bases théoriques des formules (6.61) et (6.62) de l'Eurocode 3 Partie 1-1. Ce rappel semble nécessaire pour suivre le développement théorique qui est ensuite présenté afin d'étendre le champ d'application des formules d'interaction à la torsion. La dernière partie de cet article présente la validation des formules d'interaction proposées ici à l'aide de simulations numériques de type GMNIA, tenant compte de la non linéarité géométrique et du comportement du matériau ainsi que des imperfections.

## 2 | NOTATIONS

Ci-après nous définissons les principales notations utilisées au cours de cet article.

### Lettres majuscules :

$B^I$  : bi-moment déterminé sans prise en compte des effets du second ordre (voir équation (16))

$B^{II}$  : bi-moment déterminé avec prise en compte des effets du second ordre (voir équation (16))

$B_{Ed}$  : valeur de calcul du bi-moment

$B_R$  : résistance de la section au bi-moment

$B_{Rk}$  : résistance caractéristique de la section au bi-moment

$C_{mz}$  : facteur de moment uniforme  $M_z$  équivalent

$C_{mB}$  : facteur de bi-moment uniforme équivalent

$C_{zz}$  : facteur d'interaction plastique

$E$  : module de Young

$G$  : module de cisaillement

$I_z$  : moment d'inertie de flexion autour de l'axe de faible inertie

$I_t$  : inertie de torsion

$I_w$  : inertie de gauchissement

$L$  : longueur de la barre

$M_T$  : couple de torsion appliqué à une barre

$M_{x,St.V}$  : moment de torsion de Saint-Venant

$M_{x,tot}$  : moment de torsion interne total

$M_{x,w}$  : moment de torsion non-uniforme

$M_y$  : moment de flexion agissant autour de l'axe de forte inertie

$M_{y,cr}$  : moment critique de déversement élastique

$M_{y,Ed}$  : valeur de calcul du moment  $M_y$

$\Delta M_{y,Ed}$  : moment de flexion  $M_y$  provoqué par le décalage de l'axe neutre pour les sections de classe 4

$M_{y,pl}$  : moment plastique de la section (associé à l'axe de forte inertie)

$M_{y,R}$  : résistance de la section au moment de flexion  $M_y$

$M_{y,Rk}$  : résistance caractéristique de la section au moment de flexion  $M_y$

$M_z$  : moment de flexion agissant autour de l'axe de faible inertie

$M_z^{II}$  : moment de flexion agissant autour de l'axe de faible inertie déterminé en tenant compte des effets du second ordre (voir équation (8))

$M_{z,Ed}$  : valeur de calcul du moment  $M_z$

$\Delta M_{z,Ed}$  : moment de flexion  $M_z$  provoqué par le décalage de l'axe neutre pour les sections de classe 4

$M_{z,pl}$  : moment plastique de la section (associé à l'axe de faible inertie)

$M_{z,R}$  : résistance de la section au moment de flexion  $M_z$

$M_{z,Rk}$  : résistance caractéristique de la section au moment de flexion  $M_z$

$N$  : effort normal

$N_{cr,z}$  : effort normal critique pour le flambement autour de l'axe de faible inertie

$N_{cr,T}$  : effort normal critique pour le flambement par torsion

$N_{Ed}$  : valeur de calcul de l'effort normal

$N_R$  : résistance de la section à l'effort normal

$N_{Rk}$  : résistance caractéristique de la section à l'effort normal

$R_{cr}$  : facteur de charge associé à l'instabilité élastique de la barre

$R_{pl}$  : facteur de charge associé à la résistance plastique de la section

$R_{ult}$  : facteur de charge associé à la résistance ultime de la barre

$R_{ult,Méthode}$  : facteur de charge ultime obtenu par l'application d'une méthode de vérification

$R_{ult,GMNIA}$  : facteur de charge ultime obtenu par simulation numérique de type GMNIA

### Lettres minuscules :

$b_f$  : largeur des semelles

$e_y$  : excentrement d'une charge par rapport au centre de cisaillement de la section dans la direction de l'axe  $y$  (voir [Tableau 4](#))

$e_z$  : excentrement d'une charge par rapport au centre de cisaillement de la section dans la direction de l'axe  $z$  (voir [Tableau 4](#))

$f_y$  : limite d'élasticité

$f_u$  : résistance ultime à la traction

$h$  : hauteur de la section

$i_p$  : rayon de giration polaire

$k_{yB}$  : facteur d'interaction (voir [Tableau 1](#))

$k_{yy}$  : facteur d'interaction

$k_{yz}$  : facteur d'interaction

$k_{zB}$  : facteur d'interaction (voir [Tableau 1](#))

$k_{zy}$  : facteur d'interaction

$k_{zz}$  : facteur d'interaction

$m_x$  : moment de torsion distribué le long d'une barre (unité kNm/m)

$t_f$  : épaisseur des semelles

$t_w$  : épaisseur de l'âme

$v$  : déplacement du centre de gravité de la section selon l'axe  $y$

$v_0$  : amplitude du déplacement  $v$  selon l'axe  $y$

$v^{II}$  : déplacement  $v$  déterminé en tenant compte des effets du second ordre

$v_{,xx}$  : dérivée seconde du déplacement  $v$

$v_{,xxxx}$  : dérivée quatrième du déplacement  $v$

$v_{imp}$  : imperfection géométrique de la barre selon l'axe  $y$  (voir équation (3))

$v_{imp,0}$  : amplitude de l'imperfection géométrique de la barre selon l'axe  $y$  (voir équation (3))

### Lettres grecques :

$\chi_y$  : facteur de réduction associé au flambement autour de l'axe de forte inertie

$\chi_z$  : facteur de réduction associé au flambement autour de l'axe de faible inertie

$\chi_{LT}$  : facteur de réduction associé au déversement

$\varepsilon_y$  : déformation de l'acier associée à l'atteinte de la limite élastique  $f_y$  (voir [Figure 10](#))

$\varepsilon_{st}$  : déformation de l'acier associée avec le début de l'écrouissage (voir [Figure 10](#))

$\varepsilon_t$  : décrément de gauchissement

$\varphi$  : rotation de torsion

$\varphi^I$  : rotation de torsion déterminée sans prise en compte des effets du second ordre

$\varphi^{II}$  : rotation de torsion déterminée avec prise en compte des effets du second ordre

$\varphi_{,xx}$  : dérivée seconde de la rotation de torsion

$\varphi_{,xxxx}$  : dérivée quatrième de la rotation de torsion

$\varphi_{imp}$  : imperfection géométrique de rotation de torsion de la barre (voir équation (13))

$\varphi_{imp,0}$  : amplitude de l'imperfection géométrique en rotation autour de l'axe longitudinal de la barre

$\gamma_{M1}$  : coefficient partiel

$\bar{\lambda}_G$  : élancement réduit « global » (voir équation (28))

$\bar{\lambda}_y$  : élancement réduit associé au flambement autour de l'axe de forte inertie

$\bar{\lambda}_z$  : élancement réduit associé au flambement autour de l'axe de faible inertie

$\bar{\lambda}_{LT}$  : élancement réduit associé au déversement

## 3 | APPROCHE ANALYTIQUE

### 3.1 | RAPPEL DES BASES THÉORIQUES DES FORMULES D'INTERACTION

Afin de proposer une extension des formules d'interaction aux barres sollicitées en torsion, il semble important de rappeler leur base théorique. Ce rappel nous permettra d'insister sur la fonction des coefficients d'interactions  $k_{ij}$  (voir équations (1) et (2)). Ainsi, il sera possible d'identifier plus précisément les effets qu'ils couvrent et par conséquent les effets qui doivent être couverts par des possibles coefficients d'interaction associés à la torsion.

Tout d'abord, nous prenons un premier exemple d'une barre en I doublement symétrique soumise à un effort normal  $N$  et un moment de flexion  $M_z$  distribué selon une demi-onde de sinusoïde (voir la Figure 1). A ce stade nous n'étudions pas l'effet du moment de flexion  $M_y$  afin de simplifier le développement analytique et pour ne pas tenir compte de l'effet du déversement.

Nous supposons également que la barre est soumise à une imperfection géométrique  $v_{imp}$  d'amplitude  $v_{imp,0}$  affine à la distribution du moment  $M_z$ . On peut alors exprimer l'imperfection par l'équation (3).

$$v_{imp} = v_{imp,0} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (3)$$

Nous prenons également l'hypothèse que la barre est isostatique et possède deux appuis simples à ses extrémités. Finalement, nous admettons que l'acier se comporte de façon purement élastique jusqu'à l'atteinte de la limite d'élasticité dans l'une des fibres de la section la plus sollicitée. Cet exemple n'est certainement pas très pratique mais il permet d'obtenir des solutions analytiques exactes.

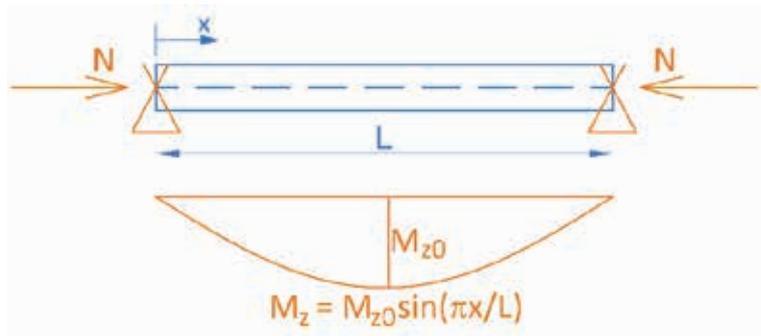


Figure 1: Barre soumise à un effort axial  $N$  et un moment  $M_z$  sinusoïdal

Afin d'obtenir l'amplification au second ordre du moment  $M_z$ , il est nécessaire de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$EI_z v_{xxxx} + N v_{xx} = -(M_{z,xx} + N v_{imp,xx}) \quad (4)$$

Après avoir effectué les dérivations nécessaires, on obtient :

$$\left[ EI_z \frac{\pi^4}{L^4} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - N \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] v_0 = \left[ M_{z0} \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + N v_{imp,0} \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \quad (5)$$

On rappelle que l'effort normal critique pour le flambement par flexion autour de l'axe de faible inertie est défini selon l'équation (6)

$$N_{cr,z} = EI_z \frac{\pi^2}{L^2} \quad (6)$$

Après avoir introduit l'expression de l'effort normal critique  $N_{cr,z}$  dans l'équation (5), nous pouvons réorganiser celle-ci pour obtenir l'expression du déplacement latéral maximal  $v_0$  résultant du moment de flexion  $M_z$ , de l'imperfection  $v_{imp}$  et des effets du second ordre :

$$v_0 = - \frac{(M_{z0} + N v_{imp,0})}{N_{cr,z} \left(1 - \frac{N}{N_{cr,z}}\right)} \quad (7)$$

Finalement, le moment de flexion  $M_z$  tenant compte des effets du second ordre peut être obtenu grâce à sa définition générale donnée dans l'équation (8) :

$$M_z^{II} = EI_z v_{,xx} = -EI_z \frac{\pi^2}{L^2} v = \frac{M_z + N v_{imp}}{1 - \frac{N}{N_{cr,z}}} \quad (8)$$

On s'aperçoit alors que le moment de flexion résultant du chargement  $M_z$  et celui résultant de l'imperfection  $N v_{imp}$  sont amplifiés par le même facteur  $1 - N/N_{cr,z}$  ce qui représente un résultat bien connu.

En supposant une interaction élastique linéaire, nous obtenons le critère de vérification de l'équation (9). Ce critère exprime que la résistance de la barre est satisfaisante, si sur toute sa longueur la somme des taux de travail vis-à-vis des efforts internes (y inclus les efforts résultants des effets du second ordre) est inférieure à 1,0. En élasticité, cela signifie également, que la contrainte agissant dans la barre ne dépasse nulle part la limite d'élasticité.

$$\frac{N}{N_R} + \frac{M_z^{II}}{M_{z,R}} = \frac{N}{N_R} + \frac{N v_{imp,0}}{\left(1 - \frac{N}{N_{cr,z}}\right) M_{z,R}} + \frac{M_z}{\left(1 - \frac{N}{N_{cr,z}}\right) M_{z,R}} \leq 1,0 \quad (9)$$

A ce stade, il existe différentes possibilités pour remplacer l'imperfection  $v_{imp}$  (notamment son amplitude  $v_{imp,0}$ ). Pour le développement des formules d'interaction de la Partie 1-1 de l'Eurocode 3, il a été choisi de remplacer l'imperfection  $v_{imp}$  par celle qui est associée aux courbes de flambement. En effet, pour le cas limite de la barre sollicitée par un effort axial seul, on peut écrire (voir référence [5]) :

$$v_{imp,0} = \left(\frac{1}{\chi_z} - 1\right) \left(1 - \chi_z \frac{N_R}{N_{cr,z}}\right) \quad (10)$$

En introduisant l'équation (10) dans l'équation (9), on obtient l'expression suivante après plusieurs opérations qui ne sont pas détaillées ici :

$$\frac{N}{\chi_z N_R} + \frac{\left(1 - \frac{N}{N_{cr,z}}\right)}{\left(1 - \chi_z \frac{N}{N_{cr,z}}\right) \left(1 - \frac{N}{N_{cr,z}}\right) M_{z,R}} = \frac{N}{\chi_z N_R} + \frac{\mu_z}{\left(1 - \frac{N}{N_{cr,z}}\right)} \frac{M_z}{M_{z,R}} \leq 1,0 \quad (11)$$

$$\text{Et : } \mu_z = \frac{\left(1 - \frac{N}{N_{cr,z}}\right)}{\left(1 - \chi_z \frac{N}{N_{cr,z}}\right)}$$

On rappelle que l'équation (11) suppose que la distribution du moment  $M_z$  suit une demi-onde de sinuséide. Si la distribution réelle du moment est différente, il est nécessaire d'introduire une correction. Cette correction est apportée par le facteur de moment équivalent  $C_{mz}$ . Finalement, on rappelle que jusqu'à ce stade, on a accepté l'hypothèse que l'acier se comporte de façon purement élastique. Si on tient compte de la plasticité, il est nécessaire d'introduire un nouveau facteur de correction. Selon l'Annexe A de l'Eurocode 3 Partie 1-1, ce facteur est noté  $C_{zz}$  pour le cas traité. De cette manière, on obtient la formule d'interaction qui est applicable pour vérifier la résistance de la barre soumise à une interaction N- $M_z$  :

$$\frac{N}{\chi_z N_R} + \frac{\mu_z C_{mz}}{C_{zz} \left(1 - \frac{N}{N_{cr,z}}\right)} \frac{M_z}{M_{z,R}} = \frac{N}{\chi_z N_R} + k_{zz} \frac{M_z}{M_{z,R}} \leq 1,0 \quad (12)$$

On peut noter qu'en l'absence d'effort normal, les coefficients  $\mu_z$ ,  $C_{mz}$ ,  $C_{zz}$  tendent vers 1,0. Nous avons ainsi développé analytiquement l'expression du coefficient d'interaction  $k_{zz}$ . De manière analogue, il est possible de développer les expressions des autres coefficients  $k_{yy}$ ,  $k_{yz}$  et  $k_{zy}$ . Toutefois, ce développement n'est pas décrit ici. Le lecteur intéressé peut se référer à [5] et [6]. Le développement analytique présenté ici conduit au facteur d'interaction de l'actuelle Annexe A de la Partie 1-1 de l'Eurocode 3. Les expressions des coefficients d'interaction de l'Annexe B de [1] sont différentes du fait qu'elles ont été obtenues par calibration par rapport à des résultats numériques. Toutefois, les coefficients d'interaction de l'Annexe B ont exactement les mêmes fonctions que ceux de l'Annexe A de [1] :

- 1) Assurer, autant que possible, la continuité entre la résistance de la barre et la résistance de la section transversale : Ainsi, pour les sections compactes (de classe 1 ou 2 – voir [1]), les coefficients d'interaction sont calibrés pour reproduire la forme d'interaction plastique et dans le cas des sections semi-compactes et élancées (sections de classe 3 et 4), les coefficients d'interaction reproduisent l'interaction élastique linéaire ;

- 2) Introduire l'amplification due aux effets de second ordre résultant du flambement et du déversement : Pour une barre sollicitée uniquement par un effort axial  $N$  ou uniquement par un moment  $M_y$ , les coefficients de réduction  $\chi_y$ ,  $\chi_z$  et  $\chi_{LT}$  introduisent la réduction de la résistance de cette barre due au flambement ( $\chi_y$ ,  $\chi_z$  – barre uniquement soumise à un effort axial) et due au déversement ( $\chi_{LT}$  – barre uniquement soumise à un moment  $M_y$ ). Cependant, si la barre est soumise à une combinaison d'effort (par exemple effort axial  $N$  et moment  $M_y$ ), l'effet de l'instabilité provoquée par un effort (par exemple flambement dû à l'effort axial  $N$ ) peut conduire à une amplification des autres efforts (l'effet du flambement augmente le moment de flexion  $M_y$  agissant dans la barre). Les coefficients d'interaction  $k_{ij}$  doivent alors également introduire l'effet d'augmentation des efforts par l'instabilité.

Dans la suite, nous allons étudier l'amplification du bi-moment résultant de l'effort normal  $N$  et du moment fléchissant  $M_y$  afin d'établir des expressions adéquates pour les coefficients d'interaction. On rappelle que le moment  $M_z$  ne provoque pas d'instabilité pour les barres en I et ne conduit pas à une augmentation du bi-moment.

## 3.2 | ANALYSE ÉLASTIQUE AU SECOND ORDRE D'UNE BARRE SOUMISE À DE LA TORSION

### 3.2.1 Amplification du bi-moment par l'effet du moment fléchissant $M_y$

Tout d'abord nous étudions l'amplification du bi-moment qui est générée par le moment de flexion  $M_y$ . On rappelle que dans une barre à section en I, le bi-moment peut être interprété comme une flexion agissant dans le plan de chaque semelle. Le moment fléchissant  $M_y$  introduit un effort de traction dans l'une des semelles et un effort de compression dans l'autre. Cet effort normal a pour effet d'amplifier la flexion dans le plan de la semelle comprimée et, par conséquent, le bi-moment.

Comme cela a été fait au paragraphe 3.1, pour le développement analytique du coefficient d'amplification du bi-moment nous supposons que :

- L'acier se comporte de façon purement élastique ;
- La barre en acier possède des conditions d'appui à fourche à ses deux extrémités ;
- Le moment de flexion  $M_y$  est constant le long de la barre ;
- La barre est sollicitée par un moment de torsion  $m_x$  qui est distribué selon une demi-onde de sinusoïde.
- La barre présente une imperfection géométrique affine au premier mode propre d'instabilité (= mode de déversement). On peut noter que le mode propre comporte deux composantes : un déplacement latéral  $v_{cr}$  ainsi qu'une rotation de torsion  $\varphi_{cr}$  comme illustré à la Figure 2. Le paramètre  $c_r$  est égal à la distance entre le point de rotation et le centre de cisaillement de la section. Il est possible de démontrer que le déplacement latéral  $v_{cr}$  est lié à la composante de rotation de torsion par l'équation (12a) et que le paramètre  $c_r$  est égal au moment critique divisé par l'effort normal critique  $N_{cr,z}$  (voir par exemple références [3] et [7]).

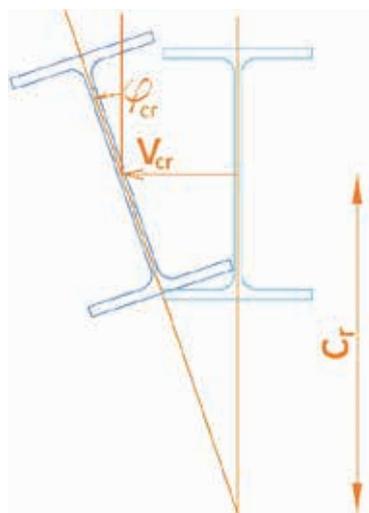


Figure 2 : Mode propre de déversement élastique

$$v_{cr} = \frac{M_{y,cr}}{N_{cr,z}} \varphi_{cr} = c_r \varphi_{cr} \quad [12a]$$

Etant donné qu'on suppose que l'imperfection est affine au mode propre, il est également possible de lier la composante de déplacement latéral de l'imperfection  $v_{imp}$  à la composante de rotation de torsion  $\varphi_{imp}$ .

$$v_{imp} = \frac{M_{y,cr}}{N_{cr,z}} \varphi_{imp} = c_r \varphi_{imp} \quad [13]$$

À nouveau nous admettons que les hypothèses concernant le chargement de la barre étudiée ne sont pas représentatives pour des cas pratiques, toutefois, elles permettent d'obtenir une solution analytique du problème.

Le bi-moment amplifié par les effets du second ordre peut être déterminé en résolvant le système d'équations différentielles donné ci-après :

$$EI_z v_{xxxx} - M_y \varphi_{xx} = M_y \varphi_{imp,xx} \quad [14]$$

$$M_y v_{xx} + EI_w \varphi_{xxxx} - GI_t \varphi_{xx} = -M_y v_{imp,xx} + m_x \quad [15]$$

Après quelques étapes de calcul, nous obtenons :

$$B'' = \frac{B^I}{1 - \frac{M_y^2}{M_{y,cr}^2}} + M_y \frac{N_{cr,z} I_w}{M_{y,cr} I_z} \frac{\varphi_{imp}}{1 - \frac{M_y}{M_{y,cr}}} \quad [16]$$

En observant l'équation (16), on peut s'apercevoir que l'imperfection est amplifiée par le facteur  $1/(1-M_y/M_{y,cr})$  tandis que l'effet du bi-moment résultant du chargement est amplifié par le facteur  $1/(1-M_y^2/M_{y,cr}^2)$ . Les facteurs d'amplification obtenus pour l'effet de l'imperfection et pour l'effet du moment de torsion appliqué (le bi-moment B') sont représentés à la Figure 3. On peut constater que l'écart augmente avec le ratio  $M_y/M_{y,cr}$ . En pratique, on peut attendre des valeurs maximales de 0,8 à 0,9 du ratio  $M_y/M_{y,cr}$ . La différence peut alors atteindre jusqu'à environ 50%.

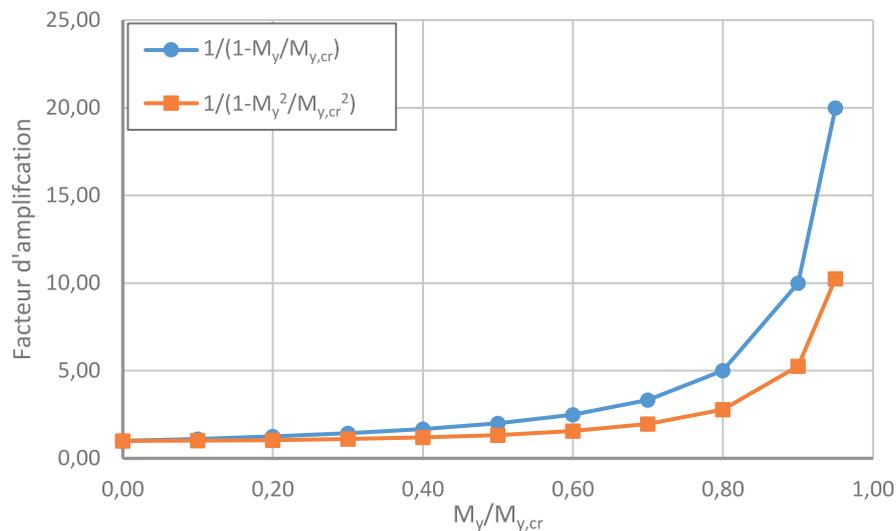


Figure 3 : Comparaison des facteurs d'amplification

On peut donner une raison physique à la différence constatée entre les deux expressions des facteurs d'amplification. En effet, le moment de torsion, à lui seul, génère uniquement une rotation de torsion tandis que le mode propre d'instabilité par déversement comporte une composante en rotation de torsion et une composante de déplacement latéral. Les déplacements engendrés par le moment de torsion ne sont alors pas entièrement affines aux déplacements résultants du mode propre. En revanche, les déplacements résultants de l'imperfection géométrique (basée sur le mode propre) sont affines au mode propre et par conséquent, sont amplifiés de manière différente que les déplacements résultants du moment de torsion.

Il est important de noter que l'imperfection initiale ainsi que le moment de torsion ne génèrent pas uniquement un bi-moment mais également un moment de flexion agissant autour de l'axe de faible inertie. Pour obtenir sa valeur, nous déterminons en premier lieu le déplacement latéral avec le système donné par les équations (14) et (15). Sans décrire tous les détails du calcul qui ne présente pas de difficultés particulières, nous obtenons les équations (17) et (18).

$$v'' = -\frac{M_y}{N_{cr,z}} \frac{\varphi^I}{1 - \frac{M_y^2}{M_{y,cr}^2}} - \frac{M_y}{N_{cr,z}} \frac{\varphi_{imp}}{1 - \frac{M_y}{M_{y,cr}}} \quad (17)$$

$$M_z'' = \frac{M_y \varphi^I}{1 - \frac{M_y^2}{M_{y,cr}^2}} + \frac{M_y \varphi_{imp}}{1 - \frac{M_y}{M_{y,cr}}} \quad (18)$$

Le moment  $M_z$  subit alors exactement le même type d'amplification que le bi-moment. En particulier, le moment  $M_z$  résultant du déplacement au premier ordre est amplifié par  $1/(1-M_y^2/M_{y,cr}^2)$  et le moment résultant de l'imperfection est amplifié par  $1/(1-M_y/M_{y,cr})$ . Si la barre était également soumise à un moment de flexion  $M_z$  appliqué à la poutre, on peut démontrer qu'il serait également amplifié par  $1/(1-M_y^2/M_{y,cr}^2)$ . Comme précédemment, la raison de cette différence est liée aux déplacements qui sont créés par le moment de flexion  $M_z$ . En effet, le moment de flexion génère uniquement un déplacement latéral et, par conséquent, les déplacements ne sont pas affines au mode propre (pour rappel le mode propre comporte une composante de déplacement latéral et une composante de rotation de torsion).

À ce stade nous pouvons conclure que l'amplification du bi-moment due aux effets de déversement est identique à l'amplification du moment  $M_z$ . Ce constat est très important pour le choix de l'expression des coefficients d'interaction et il justifie davantage que le format des coefficients d'interaction  $k_{zz}$  et  $k_{yz}$  est adapté pour couvrir les effets liés au bi-moment. Dans le paragraphe suivant nous allons étudier l'amplification du bi-moment résultant de l'effort axial (effet du flambement).

### 3.2.2 Amplification du bi-moment par l'effort axial N

Ci-après nous étudions l'amplification du bi-moment par l'effort normal. Pour cela, il est nécessaire de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$Ni_p^2 \varphi_{,xx} + EI_w \varphi_{,xxxx} - GI_t \varphi_{,xx} = m_x - Ni_p^2 \varphi_{imp,xx} \quad (19)$$

La résolution de cette équation conduit à l'expression du bi-moment exprimé au second ordre :

$$B'' = \frac{B^I}{1 - \frac{N}{N_{cr,T}}} + \frac{Ni_p^2 \varphi_{imp}}{1 - \frac{N}{N_{cr,T}}} \quad (20)$$

On peut alors constater que le bi-moment est amplifié par l'effet du flambement par torsion. On rappelle que le moment  $M_z$ , qui agirait autour de l'axe de faible inertie, serait amplifié par le facteur  $1/(1-N/N_{cr,z})$  (voir paragraphe 3.1). Il est alors intéressant de comparer l'effet du choix d'un facteur d'amplification pour différentes sections.

Les deux facteurs d'amplification dépendent notamment de la valeur de l'effort axial appliqué. Il est évident que l'effort normal appliqué à la barre est physiquement borné. En particulier, sa valeur ne peut dépasser ni la résistance (plastique) de la section, ni l'effort normal critique minimal ( $N_{cr,y}$ ,  $N_{cr,z}$  ou  $N_{cr,T}$ ). De plus, en raison des effets du second ordre et de l'effet d'instabilité élasto-plastique, l'effort normal doit obligatoirement être inférieur à la résistance de la barre au flambement. Dans le cas d'interaction entre effort normal et bi-moment, il est possible d'établir un critère de résistance simplifié sur la base des hypothèses sécuritaires suivantes :

- L'effet favorable de la forme de l'interaction plastique est négligé ;
- La barre est uniquement soumise à une imperfection géométrique autour de l'axe de faible inertie (axe z) sans composante de rotation de torsion. L'amplitude de l'imperfection est déterminée avec la Partie 1-1 de l'Eurocode 3.

Avec ces hypothèses, on peut écrire une interaction élastique linéaire entre les efforts tenant compte des effets du second ordre de la manière suivante :

$$\Gamma_{Ncr,T} = \frac{N}{\chi_z N_R} + \frac{B^I}{\left(1 - \frac{N}{N_{cr,T}}\right) B_R} \leq 1,0 \quad (21)$$

L'effort normal peut alors être déterminé itérativement de sorte que le critère de résistance  $\Gamma_{Ncr,T}$  est juste égal à 1,0 pour un taux de travail du bi-moment  $B'/B_R$  donné. Afin de simplifier le critère, on peut remplacer le facteur  $1/(1-N/N_{cr,T})$  par  $1/(1-N/N_{cr,z})$ . Ce remplacement est une simplification pour l'utilisation des formules d'interaction étant donné que le calcul de l'effort normal critique  $N_{cr,z}$  est nécessaire pour la vérification de la barre au flambement. Par conséquent, sa valeur est connue au moment de la vérification de la stabilité de la barre en interaction contrairement à la valeur de l'effort normal critique pour le flambement par torsion  $N_{cr,T}$  qui n'est généralement pas calculée. C'est pourquoi, le choix d'utiliser un facteur d'amplification lié à l'effort normal critique  $N_{cr,z}$  permet d'éviter le calcul d'un paramètre supplémentaire ( $N_{cr,T}$ ) lors de la vérification de la résistance des barres. Ci-après, nous montrerons que le remplacement du facteur d'amplification analytique par  $1/(1-N/N_{cr,z})$  place raisonnablement du côté de la sécurité.

$$\Gamma_{Ncr,z} = \frac{N}{\chi_z N_R} + \frac{B'}{\left(1 - \frac{N}{N_{cr,z}}\right) B_R} \leq 1,0 \quad (22)$$

Pour les barres étudiées ici, l'effort normal critique  $N_{cr,z}$  pour le flambement par flexion par rapport à l'axe faible est toujours plus faible que l'effort normal critique pour le flambement par torsion  $N_{cr,T}$ . L'amplification du bi-moment est alors surévaluée. Par conséquent, le critère de résistance de l'équation (22) place en sécurité par rapport à l'équation (21) ce qui est montré à la Figure 4 et Figure 5. Pour évaluer la différence entre les deux critères nous étudions ci-après le cas de deux sections compactes, HEB 160 et IPE 140, et de deux sections plus élancées, IPE 500 et HEA 800 (ici la notion d'élancement se réfère au ratio  $h/b$ ). La Figure 4 et la Figure 5 comparent le ratio entre les deux critères des équations (21) et (22) pour un taux de travail au bi-moment  $B'/B_R$  de 0,2 et 0,5, respectivement. On peut alors s'apercevoir que l'amplification du bi-moment par le facteur  $1/(1-N/N_{cr,z})$  conduit à une surestimation du critère de résistance élastique d'approximativement 45% au maximum. Cette surestimation est plus faible pour une part de bi-moment élevée étant donné que l'effort normal est plus faible dans ce cas. En pratique, les barres soumises à de la torsion ne sont généralement que faiblement sollicitées en compression. L'effet du choix du facteur d'amplification est alors encore moins prononcé.

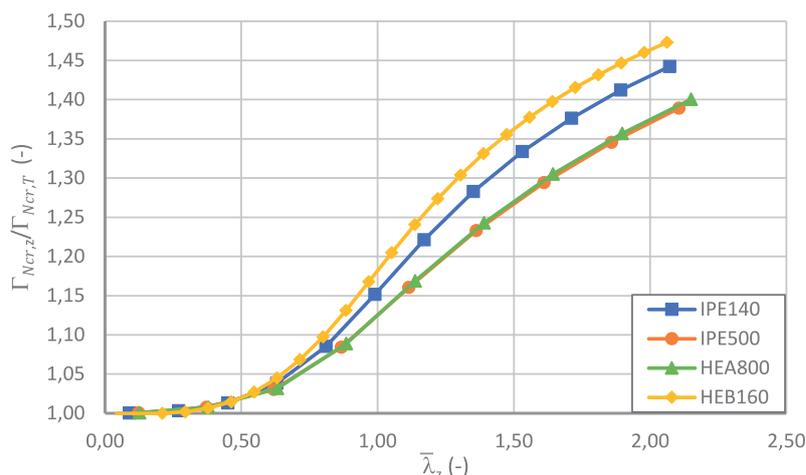


Figure 4 : Effet du facteur d'amplification sur le critère de résistance simplifié en fonction de l'élancement réduit  $\bar{\lambda}_z - B/B_{el} = 0,2$

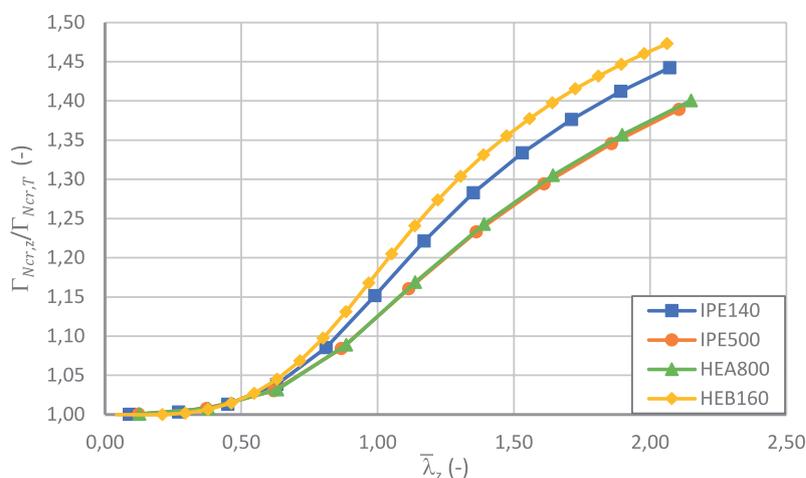


Figure 5 : Effet du facteur d'amplification sur le critère de résistance simplifié en fonction de l'élancement réduit  $\bar{\lambda}_z - B/B_{el} = 0,5$

Ce paragraphe a montré que le bi-moment est amplifié par l'effet du flambement par torsion, ce qui se traduit par le facteur d'amplification analytique de  $1/(1-N/N_{cr,T})$ . Toutefois, une approximation simplifiée de l'amplification réelle peut être effectuée avec le facteur  $1/(1-N/N_{cr,z})$ .

### 3.3 FORMAT DES FORMULES D'INTERACTION PROPOSÉES

Les développements théoriques présentés au paragraphe 3.2 permettent les conclusions que :

- L'amplification au second ordre résultant du moment de flexion  $M_y$  est identique pour le moment de flexion  $M_z$  et pour le bi-moment  $B$  ;
- L'amplification au second ordre résultant de l'effort axial est lié à l'effort normal critique  $N_{cr,z}$  (flambement par flexion autour de l'axe  $z$ ) pour le moment de flexion  $M_z$  et à l'effort normal critique  $N_{cr,T}$  (flambement par torsion) pour le bi-moment.

Finalement, nous avons déjà démontré dans la référence [4] que l'interaction plastique (et élastique) en section entre moments  $M_y$  et  $M_z$  et l'effort axial  $N$  est analogue à l'interaction entre le moment  $M_y$ , le bi-moment  $B$  et l'effort normal  $N$ . Etant donné que tous les effets d'interactions liés au bi-moment sont similaires aux effets d'interaction liés au moment  $M_z$ , les facteurs d'interaction liés aux moments  $M_z$  et ceux liés au bi-moment  $B$  doivent être similaires aussi. En effet, le **Tableau 1** montre que les expressions des facteurs d'interaction retenues ici pour  $k_{zB}$  et  $k_{yB}$  sont similaires aux expressions des facteurs d'interaction  $k_{zz}$  et  $k_{yz}$ . La seule différence consiste dans l'utilisation du facteur de « bi-moment équivalent »  $C_{mB}$  qui, contrairement au facteur  $C_{mz}$ , ne se réfère pas à la distribution du moment de flexion  $M_z$  entre deux maintiens de déplacement latéral mais à la distribution du bi-moment entre deux maintiens en rotation de torsion. Par simplification, il est évidemment possible de considérer le facteur  $C_{mB}$  égal à 1.

À ce stade, il existe alors la possibilité d'utiliser les expressions de l'Annexe A ou de l'Annexe B de l'actuelle version de la Partie 1-1 de l'Eurocode 3. Ici, nous utilisons les expressions de l'Annexe B étant donné que cette annexe est choisie comme méthode de référence pour la détermination des facteurs d'interaction dans la future révision de la Partie 1-1 de l'Eurocode 3.

Afin d'être le plus proche possible des formules d'interaction existantes, nous proposons le format suivant pour la vérification de la résistance des barres en I doublement symétrique soumises à la torsion :

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk}/\gamma_{M1}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk}/\gamma_{M1}} + k_{yz} \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rk}/\gamma_{M1}} + k_{yB} \frac{B_{Ed}}{B_{Rk}/\gamma_{M1}} \leq 1,0 \quad (23)$$

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk}/\gamma_{M1}} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk}/\gamma_{M1}} + k_{zz} \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rk}/\gamma_{M1}} + k_{zB} \frac{B_{Ed}}{B_{Rk}/\gamma_{M1}} \leq 1,0 \quad (24)$$

Dans les équations (23) et (24), l'influence de la torsion est introduite par le terme lié au bi-moment  $B_{Ed}$ . En effet, il a été démontré dans la référence [4] que le moment de torsion de Saint-Venant n'a que très peu d'influence sur la résistance des sections ouvertes. C'est seulement pour les barres très longues (coefficient  $\epsilon_T$  supérieur à 20 – voir référence [4]) que le moment de torsion de Saint-Venant peut devenir important. Toutefois, ces configurations ne correspondent pas à des cas pratiques. C'est pourquoi, le moment de torsion de Saint-Venant peut être négligé pour la vérification de la stabilité de la barre, tout comme il est négligeable dans l'interaction plastique en section (voir également référence [4]). On rappelle également, que le moment de torsion non uniforme  $M_{x,w}$  (voir par exemple [4], [19]) est en général très faible par rapport à la résistance des sections en I. Par conséquent, son influence sur la résistance de la barre peut être négligée.

Facteur d'interaction	Sections de classe 1 et 2	Sections de classe 3 et 4
$k_{yB}$	$k_{yB} = 0,6k_{zB}$	$k_{yB} = k_{zB}$
$k_{zB}$	si $\bar{\lambda}_z < 1$ : $k_{zB} = C_{mB} \left( 1 + [2\bar{\lambda}_z - 0,6] \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rd}} \right)$ si $\bar{\lambda}_z \geq 1$ : $k_{zB} = C_{mB} \left( 1 + 1,4 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rd}} \right)$	si $\bar{\lambda}_z < 1$ : $k_{zB} = C_{mB} \left( 1 + 0,6\bar{\lambda}_z \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rd}} \right)$ si $\bar{\lambda}_z \geq 1$ : $k_{zB} = C_{mB} \left( 1 + 0,6 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rd}} \right)$

Tableau 1 : Facteurs d'interaction  $k_{yB}$  et  $k_{zB}$



## 4 | ÉTUDE NUMÉRIQUE

### 4.1 | GÉNÉRAL

Dans la suite de cet article nous allons confronter les résultats des formules d'interaction aux résultats des simulations numériques. Pour cela, les résultats sont représentés par des courbes de résistance – Voir Figure 6. Dans cette figure, la résistance est présentée sous la forme du ratio  $R_{ult}/R_{pl}$ , où  $R_{ult}$  est le facteur d'amplification à appliquer aux charges pour atteindre la ruine de la barre et  $R_{pl}$  est le facteur d'amplification à appliquer aux charges pour atteindre la résistance plastique de la section transversale. Si une barre est soumise uniquement à un moment de flexion  $M_y$ ,  $R_{pl}$  est simplement égal à  $M_{y,pl}/M_y$  et  $R_{ult}$  correspond au ratio  $M_{y,ult}/M_y$ . Ce choix de représentation des résultats est différent par rapport à la représentation des résultats faite dans certaines études sur la stabilité de la barre réalisées dans le passé (voir par exemple références [8], [12], [13] et [14]). En effet, dans ces études les résultats sont représentés sous la forme de diagrammes d'interaction comme montré pour un exemple à la Figure 7 (barre de section IPE 500 soumise à une combinaison  $M_y$ -N – résultats de la référence [12]). Toutefois, les références citées ci-avant traitent uniquement de l'interaction entre au maximum trois efforts (effort axial N et moments de flexion  $M_y$  et  $M_z$ ). Comme on étudie ici l'interaction entre 4 efforts, il serait plus difficile de donner les résultats sous forme de diagramme d'interaction. De plus, les courbes d'interaction ne donnent que très peu d'informations sur la sensibilité de la barre à l'instabilité élasto-plastique. En revanche, les courbes de résistance montrent clairement trois zones de comportement:

- Les barres courtes sont capables d'atteindre la résistance de la section transversale la plus chargée (résistance plastique pour les sections de classe 1 ou 2). Les effets du second ordre sont très faibles pour ces barres ;
- Les barres d'élancement réduit intermédiaire (0,4 ... 1,2) sont plus sensibles aux effets du second ; leur ruine est caractérisée par l'instabilité élasto-plastique ;
- Les barres possédant un élancement réduit important (>1,2) souffrent d'une réduction importante de leur résistance. La ruine de ces barres est notamment influencée par les effets de l'instabilité élastique. La courbe de résistance des barres qui sont uniquement sollicitées en flexion autour de leur axe de forte inertie peut, dans certain cas, croiser la courbe d'Euler (associée à la résistance théorique à l'instabilité élastique de barre) en raison de déplacements très importants.

Finalement, on peut noter qu'il est nécessaire de calculer au moins six à huit points par courbe d'interaction afin d'obtenir une représentation satisfaisante. Par conséquent, la majorité des auteurs travaillant sur la stabilité des barres dans le passé a choisi d'étudier uniquement trois à quatre valeurs différentes de l'élancement réduit. Afin de valider les formules d'interaction proposées ici, nous avons étudié au moins huit longueurs de barre différentes (et ainsi huit élancements réduits différents). Par conséquent, les simulations numériques réalisées ici contribuent également à élargir la base de données de résultats obtenus dans le passé.

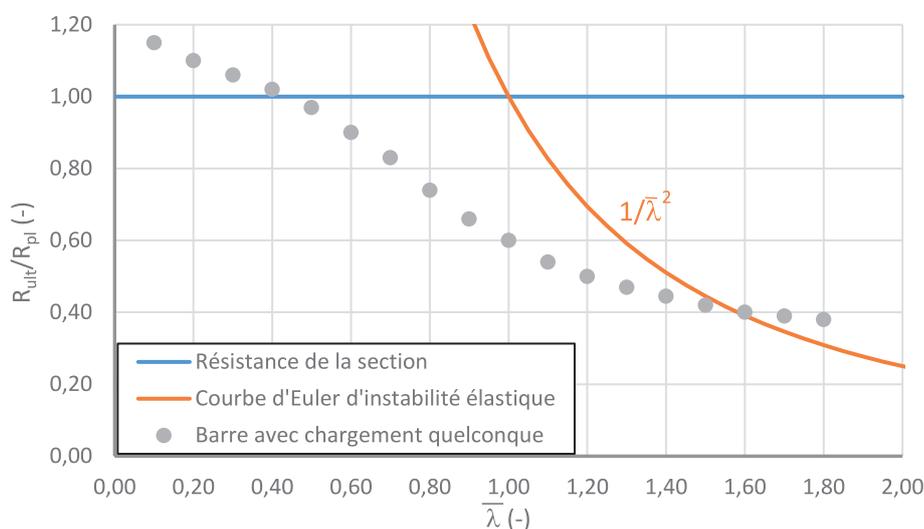


Figure 6 : Schéma d'une courbe de résistance

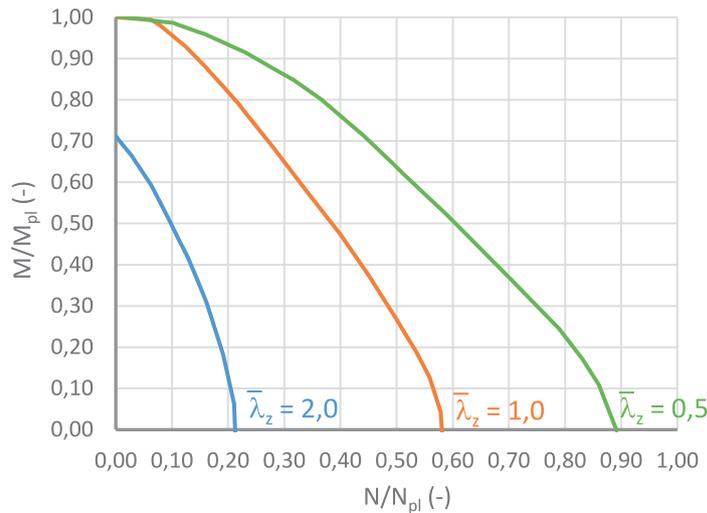


Figure 7 : Représentation de la résistance des barres sous la forme d'un diagramme d'interaction

## 4.2 | ÉTENDUE DE L'ÉTUDE PARAMÉTRIQUE

### 4.2.1 Sections étudiées

Le [Tableau 2](#) montre les sections en I doublement symétriques, étudiées dans la suite pour évaluer les formules d'interaction proposées. On peut noter que nous étudions certaines sections laminées à chaud (HEB 200, IPE 500, HEAA 800). Afin d'étudier d'autres formes de sections laminées à chaud, les sections notées « HR » dans le [Tableau 2](#) sont utilisées. Ces sections sont calculées avec les contraintes résiduelles des sections laminées à chaud (voir paragraphe 4.3 et [Figure 11](#)) mais possèdent une géométrie non standard. Elles permettent d'étudier plus précisément certains paramètres comme le ratio  $h/b$ , l'éclatement des parois et leur sensibilité au voilement, le ratio entre inertie de torsion et inertie de gauchissement, etc.

Finalement, nous étudions les quatre sections soudées données au [Tableau 2](#). Les sections du [Tableau 5](#) ont été sélectionnées afin d'étudier une variété suffisante de sections en termes de :

- Ratio  $h/b$  représentant la sensibilité de la section au déversement (en augmentant le ratio  $h/b$ , les sections deviennent plus sensibles au déversement) ;
- Coefficient de décrétement du gauchissement  $\epsilon_r$ , représentant l'importance relative du bi-moment (et du moment de torsion non-uniforme – voir référence [4]).

Notation	$h$ (mm)	$t_w$ (mm)	$b_f$ (mm)	$t_f$ (mm)
HEB 200	200	9	200	15
IPE 500	500	10,2	200	16
HEAA 800	770	14	300	18
HR290.3.300.14	290	3	300	14
HR500.4.300.20	500	4	300	20
HR770.5.400.17	770	5	400	17
W650.5.180.10	650	5	180	10
W1330.10.280.15	1330	10	280	15
W850.6.300.12	850	6	300	12
W850.5,5.200.14	850	5,5	200	14

Tableau 2 : Dimensions des sections étudiées

On peut noter que les congés ne sont pas représentés dans la modélisation. Toutefois, dans la référence [3], il a été montré que le comportement global de la barre n'est pas influencé de manière significative par les congés.

Il convient également de noter que, en fonction du chargement, certaines sections étudiées peuvent être de classe 3 ou de classe 4 selon l'Eurocode 3. Par conséquent ces sections ne sont pas capables d'atteindre leur résistance plastique, en raison du voilement local. Sans changer le comportement des sections, l'effet du voilement est éliminé en appliquant des barres fictives suffisamment rigides (éléments finis de type poutre) qui représentent le rôle de raidisseurs verticaux. Afin de ne pas s'opposer au gauchissement des sections, ces barres possèdent uniquement une rigidité perpendiculaire aux plaques auxquelles elles sont assemblées (âme ou semelle). A la [Figure 8](#), ces éléments finis « poutre » sont représentés en orange. Lors des simulations numériques, ces éléments « poutre » sont générés à chaque section intermédiaire. La référence [\[3\]](#) détaille davantage la calibration de la rigidité de ces éléments finis « rigides » et la validation de cette approche.

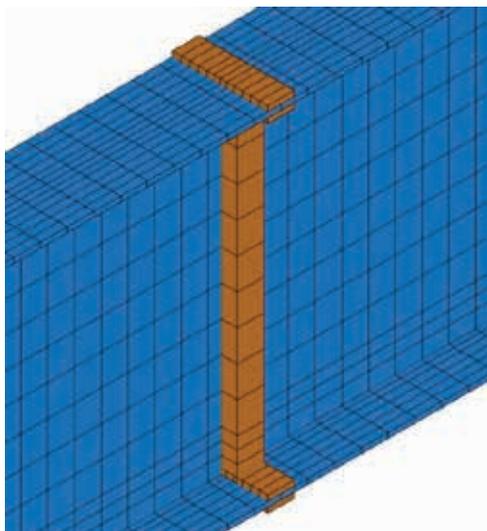


Figure 8 : Utilisation d'éléments « poutre » rigides empêchant le voilement

#### 4.2.2 Combinaisons d'efforts étudiées

Ici, on étudie l'effet d'interaction entre l'effort axial, la flexion bi-axiale et la torsion sur la stabilité de la barre. Par conséquent, la résistance est influencée par l'importance relative des différents efforts les uns par rapport aux autres. De plus, la forme du diagramme des moments de flexion influence la résistance ultime des barres étudiées. Dans le cadre de cet article, nous ne considérons que les barres soumises à de la flexion dominante. L'effort normal de compression est considéré comme effort d'accompagnement, ce qui couvre les configurations pratiques des barres soumises à la torsion. En particulier, nous étudions les taux d'effort normal suivants dans l'étude paramétrique :

- $N/N_{pl} = 0$  noté comme "N0" ;
- $N/N_{pl} = 0,15$  noté comme " N15" ;
- $N/N_{pl} = 0,30$  noté comme " N30".

En plus des différents taux d'effort normal, nous faisons varier la « bi-axialité » de la flexion. Dans la suite nous caractérisons le ratio entre les moments  $M_y$  et  $M_z$  par un angle dans le diagramme d'interaction comme représenté à la [Figure 9](#) pour une section IPE 500. Cette figure montre que les sections sont majoritairement soumises à des moments de flexion  $M_y$  dominant ce qui correspond à la performance mécanique des sections en I (et ainsi représente la pratique). Ci-après, nous notons les différents taux de bi-axialité comme « MyMz0 » (uniquement moment  $M_y$ ), « MyMz15 », « MyMz30 », « MyMz60 », « MyMz90 » (uniquement moment  $M_z$ ).

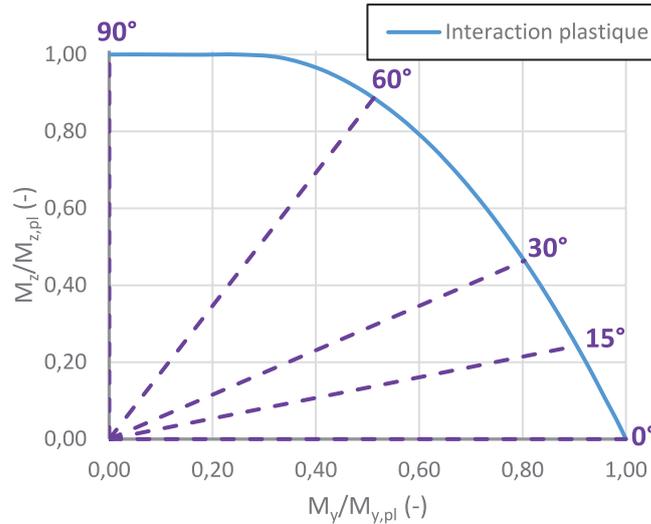


Figure 9 : Définition de la « bi-axialité » des moments de flexion

Comme expliqué avant, en plus de l'importance relative des différents efforts les uns par rapports aux autres, leur distribution le long de la barre influence la résistance vis-à-vis de l'instabilité. Nous supposons que l'effort normal est constant dans tous les cas. En revanche, nous considérons trois distributions des moments de flexion (voir [Tableau 3](#)) :

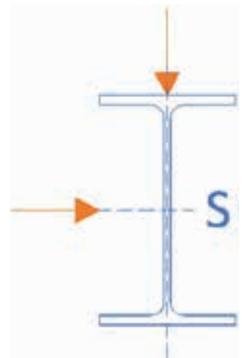
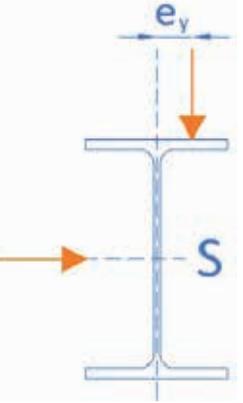
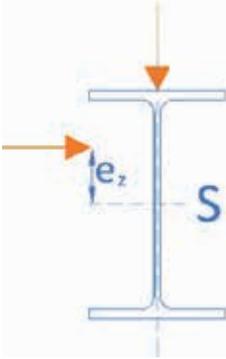
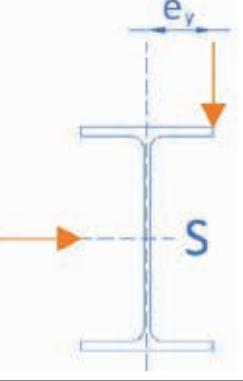
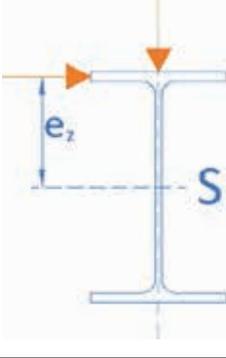
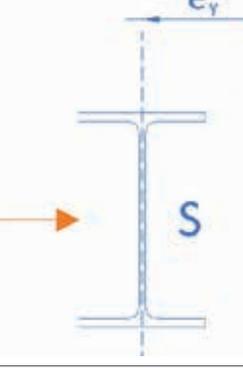
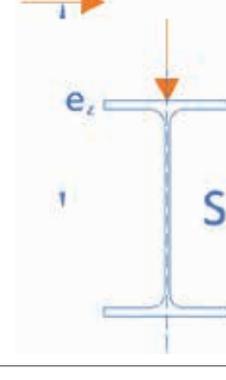
- 1) Distribution notée « M » : les deux moments de flexion  $M_y$  et  $M_z$  sont constants sur la longueur de la barre ;
- 2) Distribution notée « P1 » : la barre est simplement appuyée à ses extrémités et une force ponctuelle est appliquée à mi travée conduisant à une distribution (bi-) triangulaire sans changement de signe des moments ;
- 3) Distribution notée « P2 » : la barre est encastree à ses extrémités (le gauchissement reste libre) et une force ponctuelle est appliquée à mi travée conduisant à une distribution (bi-) triangulaire avec changement de signe des moments.

Pour ces trois cas de charge, un moment de torsion  $M_T$  unique est appliqué à mi travée. Pour les cas « P1 » et « P2 » le moment de torsion est introduit par l'excentrement des forces par rapport au centre de cisaillement de la section (voir [Tableau 4](#)). En cas de moment de flexion constant (cas de charge « M »), le moment de torsion appliqué à mi-travée est calculé selon l'équation (25). En fonction de la bi-axialité, le moment  $M$  est égal au moment de flexion  $M_y$  (pour  $MyMz0$ ,  $MyMz15$ ,  $MyMz30$ ,  $MyMz60$ ) ou au moment de flexion  $M_z$  (pour  $MyMz90$ ). D'après l'équation (25), le moment de torsion appliqué est alors égal au moment de torsion qui serait appliqué par une force ponctuelle générant le moment  $M$  appliqué à une distance « e » par rapport au centre de gravité. Les distances « e » sont définies indépendamment du cas de charge au [Tableau 4](#).

$$M_T = 2M_{x,tot} = 4M \frac{e}{L} \quad [25]$$

Notation	Distribution des moments de flexion $M_y$ et $M_z$	Distribution du moment de torsion interne $M_{x,tot} = M_{x,St.V} + M_{x,w}$
M		
P1		
P2		

Tableau 3 : Distribution des moments de flexion et du moment de torsion le long de la barre

Notation	Représentation	Notation	Représentation
Ecc0	 $e_y = 0$ $e_z = 0$		
EccY1	 $e_y = b_f/4$ $e_z = 0$	EccZ1	 $e_y = 0$ $e_z = (h-t_f)/4$
EccY2	 $e_y = b_f/2$ $e_z = 0$	EccZ2	 $e_y = 0$ $e_z = (h-t_f)/2$
EccY3	 $e_y = b_f$ $e_z = 0$	EccZ3	 $e_y = 0$ $e_z = (h-t_f)$

Note : En présence d'un moment de flexion  $M_y$ , il est possible de se satisfaire l'excentrement  $e_y$  de la charge verticale pour introduire la torsion. En revanche, en l'absence de charge verticale ( $M_y = 0$ ), le moment de torsion doit être engendré par l'excentrement de la charge horizontale.

Tableau 3 : Excentremets étudiés dans les simulations numériques

On peut admettre que les excentremets étudiés ici ne représentent pas tous des configurations pratiques. L'objectif est de faire varier l'importance relative du moment de torsion appliqué et ainsi l'importance relative du bi-moment transmis par la barre.

Finalement, le [Tableau 5](#) définit le domaine de l'étude paramétrique couvert dans le cadre de cet article pour valider les formules d'interaction proposées. Pour chaque configuration « section+chargement » nous faisons varier la longueur de la barre dans l'intervalle  $5,5 b_f$  à  $60 b_f$ . Afin d'obtenir une courbe de résistance suffisamment précise, nous avons considéré huit longueurs de barre en général.

Cas de charge	Section	Effort axial	Bi-axialité	Excentricité des charges
M	HEB 200 IPE 500 HEAA 800 HR290.3.300.14 (HR1) HR500.4.300.20 (HR2) HR770.5.400.17 (HR3) W650.5.180.10 (W1) W1330.10.280.15 (W2) W850.6.300.12 (W3) W850.5,5.200.14 (W4)	N0 N15 N30	MyMz0 MyMz15 MyMz30 MyMz60	Ecc0, EccY1, EccY2, EccY3
			MyMz90	Ecc0, EccZ1, EccZ2, EccZ3
P1	HEB 200 IPE 500	N0 N30	MyMz0 MyMz30	Ecc0, EcY1, EccY3
P2	HR500.4.300.20 (HR2) HR770.5.400.17 (HR3) W650.5.180.10 (W1) W1330.10.280.15 (W2)		MyMz60	Ecc0, EcZ1, EccY3

Tableau 5 : Domaine de l'étude paramétrique

### 4.3 | DESCRIPTION DU MODÈLE NUMÉRIQUE

Les formules d'interaction proposées dans le chapitre 3.3 (équations (23) et (24)) sont validées ci-après à l'aide d'analyses numériques de type GMNIA. Ce type de simulation tient compte des imperfections (géométriques et matérielles), de la non-linéarité du comportement de l'acier (plasticité et écrouissage) et de la non-linéarité géométrique (effets du second ordre).

Nous avons choisi d'utiliser une loi de l'acier multilinéaire, tenant compte de l'écrouissage comme recommandé dans la référence [9]. La [Figure 10](#) montre schématiquement la relation entre déformation et contrainte. Dans le cadre de l'étude paramétrique présentée ici, toutes les simulations sont réalisées en se basant sur **une nuance d'acier S235**. Toutefois, l'influence de la nuance d'acier sur le résultat final n'est pas significative comme montré dans la référence [3].

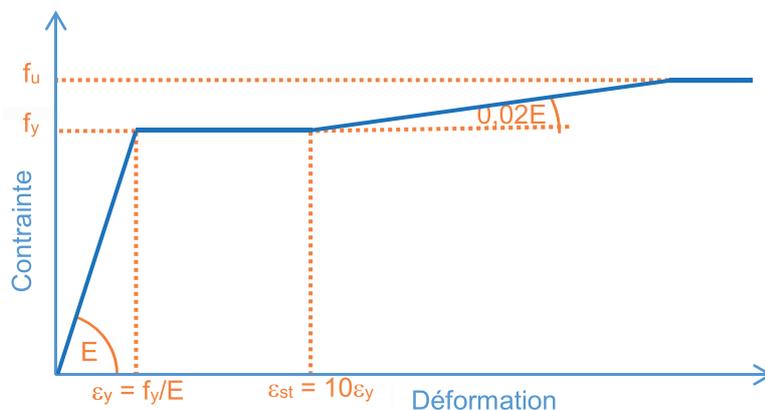


Figure 10 : Loi du matériau utilisée

Afin d'obtenir des résultats numériques fiables et satisfaisants du point de vue de la sécurité, il est nécessaire d'inclure des imperfections structurales qui sont inévitables dans les constructions réelles. Les simulations utilisées pour la validation du modèle de calcul tiennent compte de contraintes résiduelles conformément aux recommandations de la référence [9] (voir Figure 11 et Figure 12).

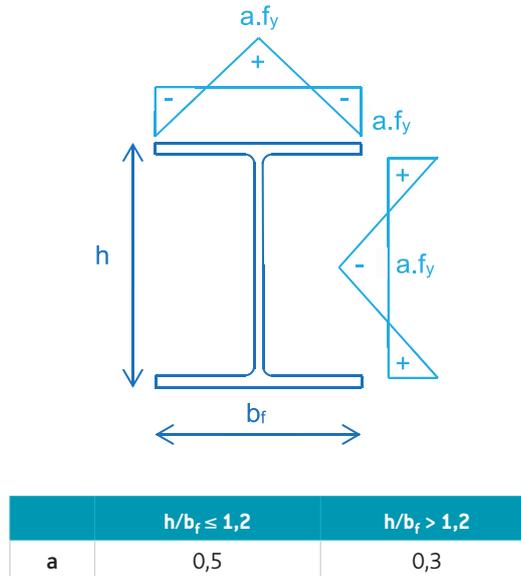


Figure 11: Contraintes résiduelles pour les sections en I laminées à chaud

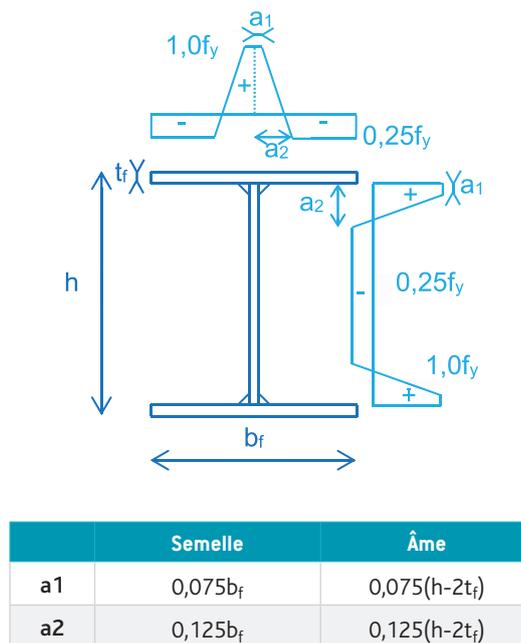


Figure 12: Contraintes résiduelles pour les sections en I soudées

Dans cet article nous présentons uniquement les résultats obtenus pour les sections compactes (de classe 1 et 2 selon l'Eurocode 3 Partie 1-1). Ces sections ne sont alors pas sensibles aux effets de voilement et elles sont capables d'atteindre leur pleine résistance plastique si les effets d'instabilité globale (flambement, déversement) deviennent négligeables. Par conséquent, il n'est pas nécessaire d'inclure des imperfections locales de plaque. En revanche, il est nécessaire d'inclure une imperfection géométrique de barre. Ici nous avons choisi d'introduire une imperfection géométrique affine au premier mode propre d'instabilité élastique conformément aux recommandations des références [9] et [10].

Finalement, la modélisation en éléments finis d'une barre IPE 500 est présentée, à titre d'exemple, à la [Figure 13](#). Dans tous les calculs, nous avons considéré la barre avec deux appuis à fourche à ses extrémités. Ces conditions théoriques sont modélisées, comme représenté schématiquement sur cette figure :

- En bloquant le déplacement longitudinal du centre de gravité à une extrémité ;
- En bloquant le déplacement vertical du centre de gravité aux deux extrémités ;
- En bloquant le déplacement horizontal des intersections entre âme et semelles aux deux extrémités.

Les barres considérées comme encastrées à leurs extrémités sont modélisées avec les mêmes types de blocage. L'encastrement est reproduit en appliquant les moments d'extrémités adéquats.

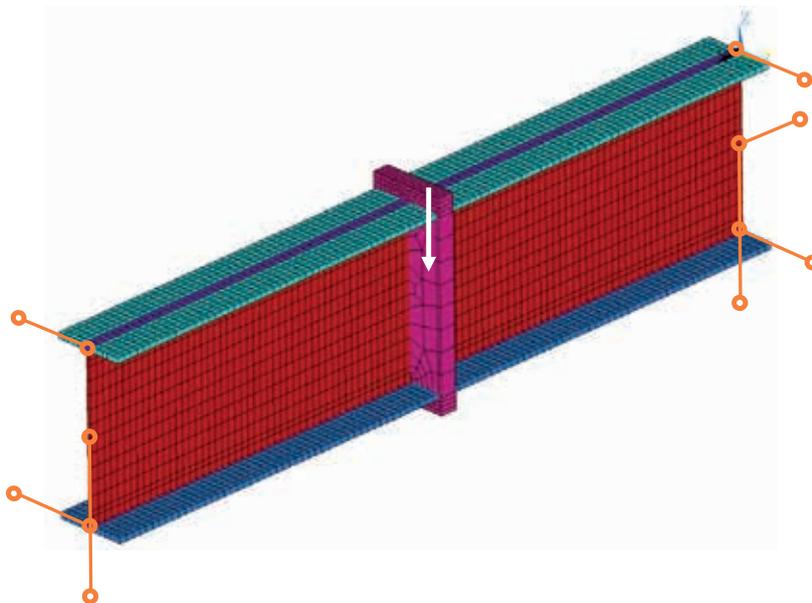


Figure 13 : Conditions aux limites et introduction d'une force ponctuelle

Pour valider les formules d'interaction proposées, nous avons étudié les trois formes du diagramme des moments données au [Tableau 3](#). La [Figure 13](#) représente un cas de charge « P1 » avec un excentrement Y1 (voir [Tableau 4](#)). La charge verticale est alors excentrée d'une distance latérale de  $b_i/4$  par rapport au centre de cisaillement ce qui conduit à un moment de torsion  $M_T$  égal à  $F_z b/4$  (le moment de torsion  $M_{x,tot}$  représenté au [Tableau 3](#) est égal à  $M_T/2$ ).

## 4.4 | ÉTUDE PARAMÉTRIQUE ET VALIDATION DE LA MÉTHODE DE CALCUL

### 4.4.1 Barres soumises à la flexion bi-axiale et à de la torsion

#### 4.4.1.1 Évaluation générale

Tout d'abord, la [Figure 14](#) donne une évaluation globale de la précision des formules d'interaction comparées aux simulations numériques. Ce diagramme représente en abscisse le ratio entre le facteur de charge ultime (conduisant à la ruine de la barre) prédit par les formules d'interaction (noté  $R_{ult,Méthode}$  ci-après) et le facteur de charge ultime obtenu par les simulations numériques (noté  $R_{ult,GMNIA}$  ci-après). En ordonnée, nous donnons le pourcentage de cas qui se situent dans un intervalle donné du ratio  $R_{ult,Méthode}/R_{ult,GMNIA}$ . Il est important de noter que les formules d'interaction sont appliquées avec des efforts internes issus d'une analyse élastique linéaire (analyse au premier ordre), ce qui correspond à la pratique.

On peut s'apercevoir que les formules d'interaction offrent un niveau de sécurité satisfaisant. Seulement 4% des cas calculés sont insécuritaires avec une insécurité ne dépassant pas 9% (ratio  $R_{ult,Méthode}/R_{ult,GMNIA}$  est égal à 1,09). La dispersion des résultats semble assez importante mais en raison de la complexité des paramètres et de leur nombre, un écart type global de 16% peut être accepté. Toutefois, la [Figure 14](#) montre également que les formules d'interaction sont très sécuritaires pour un grand nombre de cas. En effet, dans 33% des cas, les prédictions de résistance sont inférieures à 70% de la résistance obtenue par les simulations GMNIA. Afin d'étudier ces résultats plus en détail, il est intéressant de représenter le ratio  $R_{ult,Méthode}/R_{ult,GMNIA}$  en fonction de l'élançement réduit au déversement de la barre (voir [Figure 15](#)).

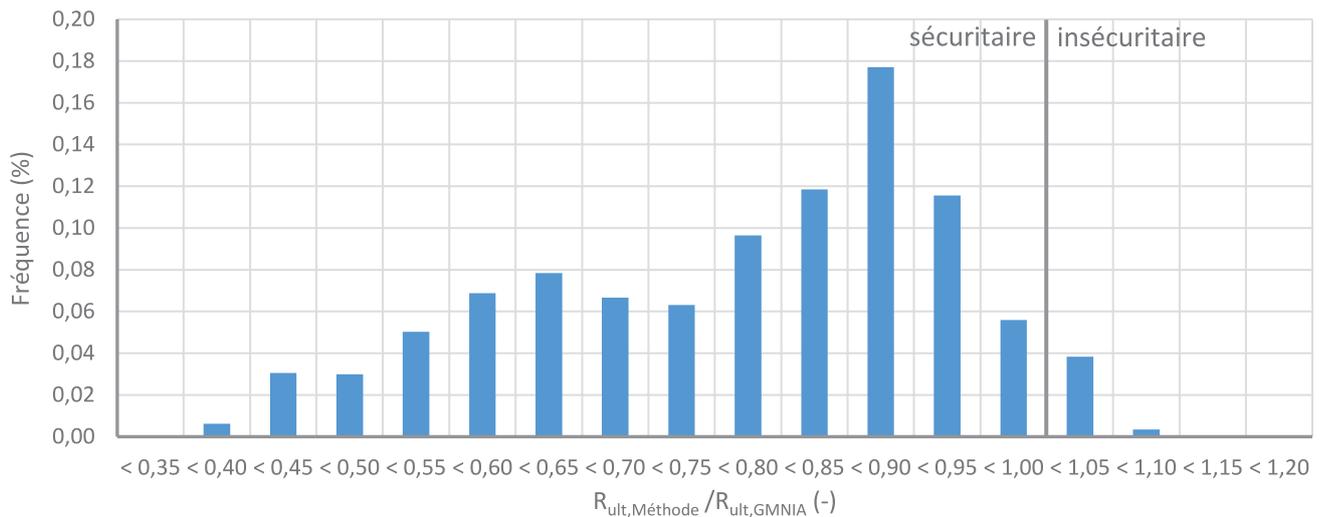


Figure 14 : Ratio entre facteur de charge obtenu par formules d'interaction et facteur de charge obtenu par GMNIA

#### 4.4.1.2 Étude des cas sécuritaires

Sur la Figure 15, on peut constater que les formules d'interaction proposées sont particulièrement sécuritaires pour :

- Des valeurs faibles de l'élançement réduit ( $\bar{\lambda}_{LT} = 0$  si la barre est uniquement soumise à un moment de torsion  $M_T$  et un moment  $M_z$ ) : Pour ces cas, la création d'une rotule plastique en gauchissement conduit à une redistribution des efforts internes et en particulier à une réduction du bi-moment. Cet effet ne peut pas être pris en compte par une simple analyse élastique (pour la détermination des efforts internes), ce qui réduit la précision des formules d'interaction (voir référence [4]) ;
- Des valeurs importantes de l'élançement réduit: les résultats les plus sécuritaires sont obtenus pour des sections soudées qui sont pénalisées dans la version actuelle de la Partie 1-1 de l'Eurocode 3 [1] par l'attribution de courbes de réduction (pour le déversement) sécuritaires (courbes c et d) ;
- Des valeurs intermédiaires de l'élançement réduit : les résultats très sécuritaires sont obtenus pour des barres soumises à un moment de torsion important. Par conséquent, la résistance est fortement influencée par le comportement plastique en torsion de la barre (réduction du bi-moment – voir référence [3]) et par l'effet d'une rotation de torsion importante.

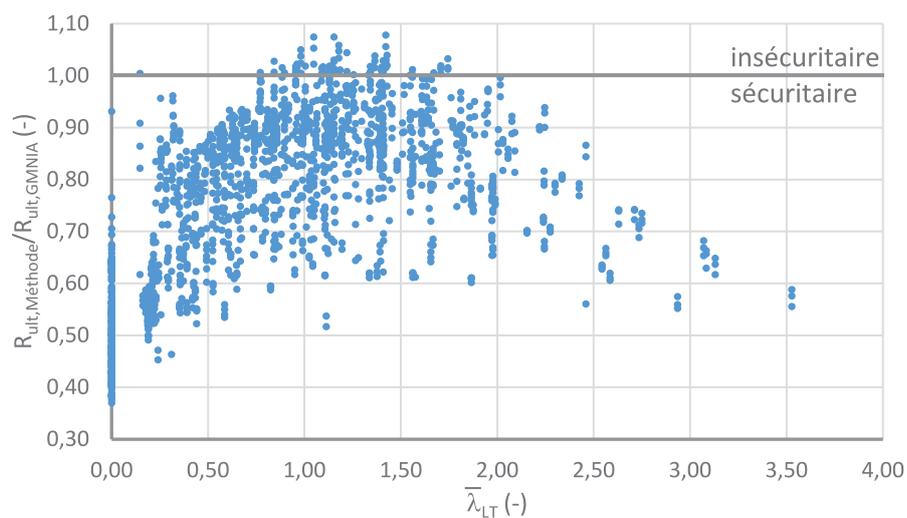


Figure 15 : Ratio entre facteurs de charge ultime en fonction de l'élançement réduit pour le déversement

## Barres de faible élancement

Dans la référence [4], il a été montré que la formation « d'une rotule plastique en gauchissement » conduit à une redistribution des efforts internes liés à la torsion. On rappelle que la rigidité en gauchissement de la section réduit avec la plastification des semelles. Si au moins une des deux semelles a entièrement plastifié, une rotule en gauchissement est générée. A partir de ce moment, le chargement peut encore augmenter si l'âme de la section (ou la deuxième semelle) n'a pas encore entièrement plastifié. Toutefois, comme l'inertie de gauchissement de la section la plus chargée tend vers 0 (et ainsi la rigidité en gauchissement de la barre tend vers 0), le bi-moment ne peut plus augmenter. En effet, les charges de torsion sont transmises aux appuis par le moment de torsion de Saint-Venant. Cette réserve plastique n'est pas prise en compte au niveau de formules d'interaction étant données que ces dernières sont appliquées en se basant sur des efforts internes déterminés avec une analyse élastique ce qui représente la pratique. Dans le cadre de la proposition, nous avons décidé de ne pas tenir compte de la réserve plastique liée à l'analyse de la barre (détermination des efforts internes). Afin de bénéficier de l'effet bénéfique du comportement plastique de la barre en torsion, il est recommandé d'effectuer une analyse plastique de la barre en tenant compte des imperfections et des effets du second ordre. Si une telle analyse est effectuée, il n'est plus nécessaire de procéder à une vérification de la résistance de la barre à l'aide des formules d'interaction proposées ici.

## Barres d'élancement moyen et d'élancement important

La Figure 16 représente les résultats obtenus pour les sections soudées. Comme précédemment, nous observons le caractère sécuritaire des formules d'interaction pour des élancements réduits faibles. Ce constat est à nouveau dû au comportement plastique particulier des sections ouvertes soumises à de la torsion. Pour des élancements intermédiaires, on peut remarquer qu'il existe deux groupes de résultats. Le premier groupe, entouré en orange, forme un arc de cercle qui s'approche au maximum des résultats de référence (ratio  $R_{ult,Méthode}/R_{ult,GMNIA} = 1,0$ ) pour un élancement réduit d'approximativement 1,0. En cas d'élancement plus faible ou plus fort, les résultats des formules d'interaction s'éloignent des simulations numériques tout en restant sécuritaires.

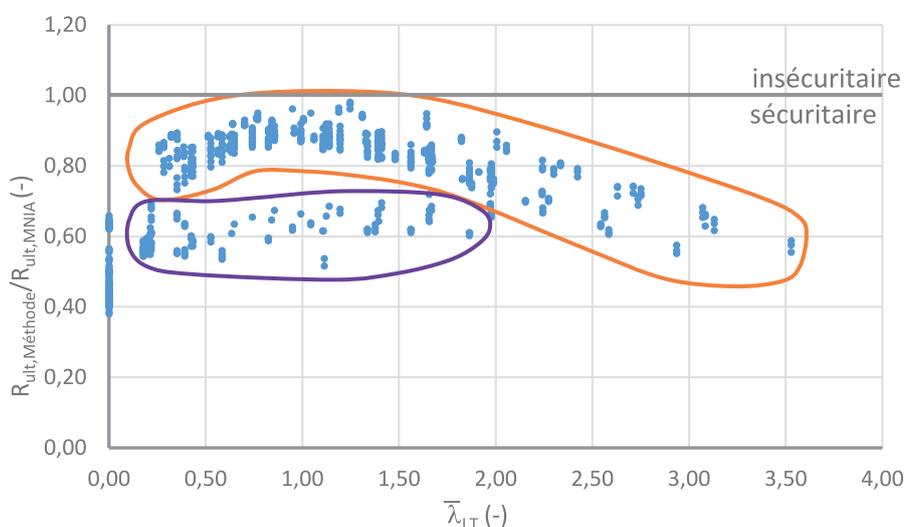


Figure 16 : Ratio entre facteur de charge obtenu par formules d'interaction et facteur de charge obtenu par GMNIA pour les sections soudées

La forme en arc de certains résultats peut être expliquée à l'aide de la forme générale de la courbe de résistance des sections soudées qui est représentée, pour un exemple particulier, à la Figure 17. Cette figure montre l'évolution de la résistance d'une barre à section soudée W650.5.180.10 ( $h = 650$  mm ;  $t_w = 5$  mm ;  $b_f = 180$  mm ;  $t_f = 10$  mm – section notée W1) en fonction de son élancement réduit au déversement. Cette barre est uniquement soumise à un moment de flexion  $M_y$  constant sans effort normal (notation N0), sans moment de flexion  $M_z$  (notation  $M_yM_z0$ ) et sans torsion (notation ECC0).

La Figure 17 montre que la courbe de résistance obtenue numériquement est caractérisée par trois inversions de la courbure : pour cet exemple, la courbure passe de concave à convexe pour un élancement réduit d'environ 0,7, elle passe de convexe à concave pour un élancement réduit d'environ 1,2 et finalement elle change à nouveau de concave à convexe pour un élancement réduit d'environ 1,6. Les courbes de réduction proposées dans la version actuelle de la Partie 1-1 de l'Eurocode 3 (§6.3.2.2 de la référence [1]) possèdent une forme générale plus simple comme représenté à la Figure 17 pour la courbe « d » applicable pour la section étudiée. Par conséquent, la différence entre les résultats numériques et les résultats de la méthode appliquée est plus ou moins importante en fonction de l'élancement réduit. On peut observer que les deux courbes s'approchent pour un élancement réduit d'environ 0,7 à 1,0 ce qui explique l'arrangement en forme d'arc des résultats de la Figure 16. Il est à noter que l'importance de l'écart entre résultats numériques et résultats obtenus avec les formules d'interaction dépend évidemment de l'importance relative du moment de flexion  $M_y$  dans le chargement.

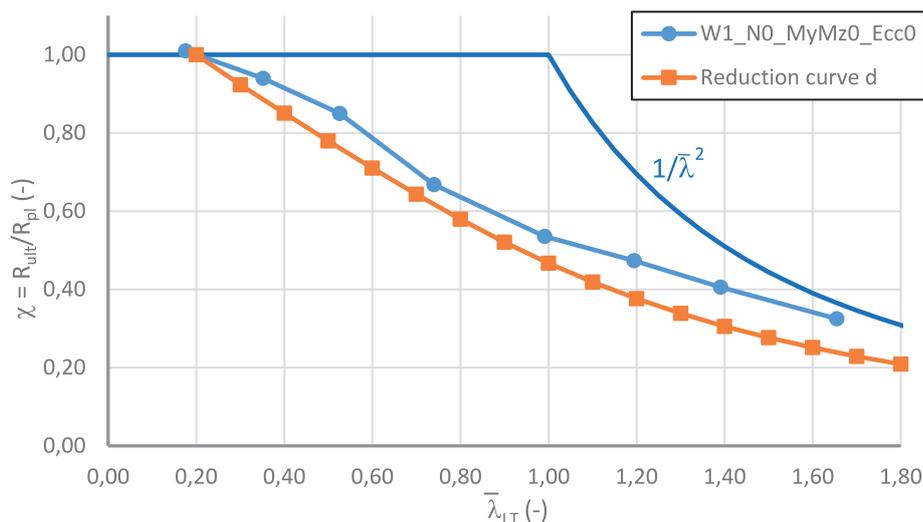


Figure 17 : Courbe de résistance pour une barre de section W650.5.180.10 (W1) soumise à un moment de flexion  $M_y$  constant

Afin de comprendre la différence entre les deux groupes de résultats représentés à la Figure 16, nous étudions à nouveau une barre de section W650.8.180.10 (W1). Pour l'exemple suivant, la barre est soumise à de la flexion bi-axiale  $MyMz60$  et un moment de torsion moyen  $EccY2$  dans un premier temps, et ensuite à un moment de torsion plus important  $EccY3$ .

Les résultats numériques obtenus pour le premier cas, noté W1\_N0\_MyMz60\_EccY2, sont représentés à la Figure 18 et à la Figure 19. La Figure 18 montre l'évolution du chargement, exprimée par le ratio  $R_{charge}$  au facteur de charge conduisant à la plastification totale de la section  $R_{pl}$ , avec la rotation de torsion à mi portée de la barre. Sur cette figure, on peut observer un comportement classique caractérisé par une première partie quasi linéaire jusqu'à une rotation de torsion d'environ 0,04 rad. Ensuite, la courbe devient non-linéaire suite à une réduction de la rigidité de la barre due à la plastification. La charge maximale est atteinte pour un ratio  $R_{charge}/R_{pl}$  d'approximativement 0,5. Finalement, après avoir passé le point de charge maximale, l'augmentation de la rotation de torsion est accompagnée par une réduction de la charge. La Figure 19 montre la distribution des contraintes de von Mises au niveau de la charge maximale. On peut observer que la semelle supérieure a plastifié en raison des charges appliquées et des effets du second ordre amplifiant les efforts internes. La rigidité latérale de la semelle supérieure tend vers 0 en raison de cette plastification, ce qui conduit à la ruine elasto-plastique par instabilité. Ces résultats ne sont pas surprenants et correspondent au mode de ruine attendu pour cette barre.

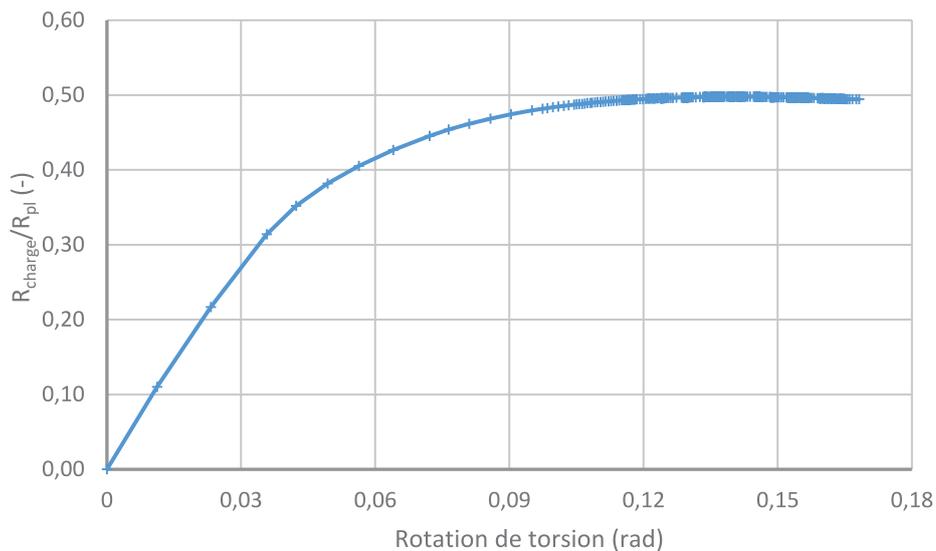


Figure 18 : Courbe Charge – Rotation de torsion pour W1\_NO\_MyMz60\_EccY2

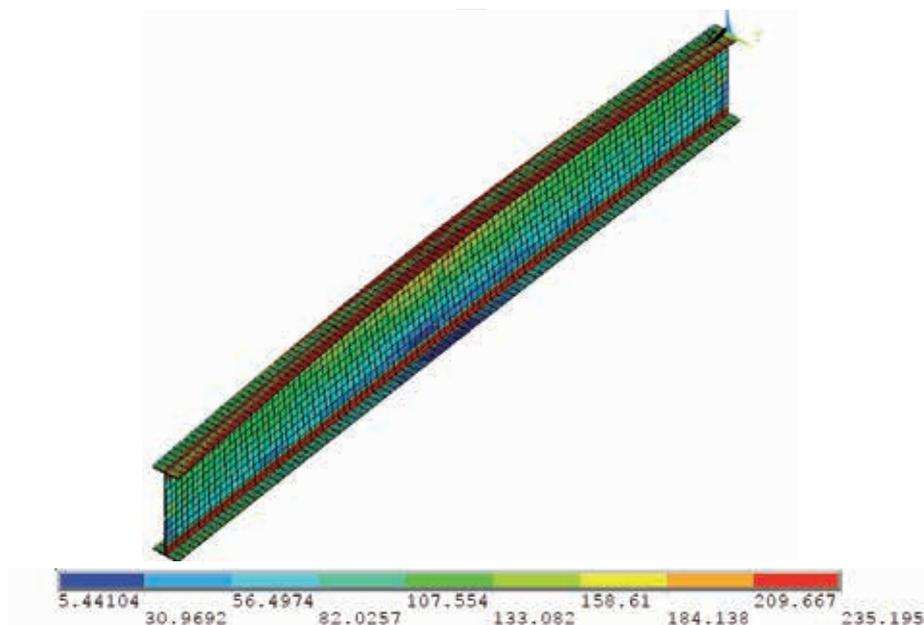


Figure 19 : Contraintes de von Mises au niveau du chargement maximal pour W1\_NO\_MyMz60\_EccY2

Ci-après, nous allons comparer les résultats des deux figures précédentes avec les résultats obtenus pour la barre soumise à un moment de torsion plus important. D'abord, la Figure 20 représente la courbe charge-rotation de torsion à mi-portée de la barre. On peut s'apercevoir que le comportement de cette deuxième barre est différent de celui de la barre W1\_NO\_MyMz60\_EccY2. En effet, la courbe de la Figure 20 est plus complexe et caractérisée par quatre phases :

- 1) Le comportement est quasi linéaire jusqu'à une rotation de torsion d'environ 0,07 rad ;
- 2) Le comportement devient non-linéaire avec une rigidité qui diminue jusqu'à une rotation de torsion de 0,16 rad ;
- 3) Le comportement est non-linéaire, mais avec une rigidité qui augmente jusqu'à une rotation de torsion d'environ 0,35 rad ;
- 4) La rigidité de la barre diminue à nouveau et la charge maximale est atteinte pour une rotation de torsion d'environ 0,40 rad.

Comme pour la barre précédente (W1\_NO\_MyMz60\_EccY2), la ruine est caractérisée par l'instabilité élasto-plastique. Toutefois, la ruine est atteinte à un niveau de déformation plus élevé. En effet, l'augmentation de la rigidité dans la phase 3) est liée à l'initiation de l'écroutissage.

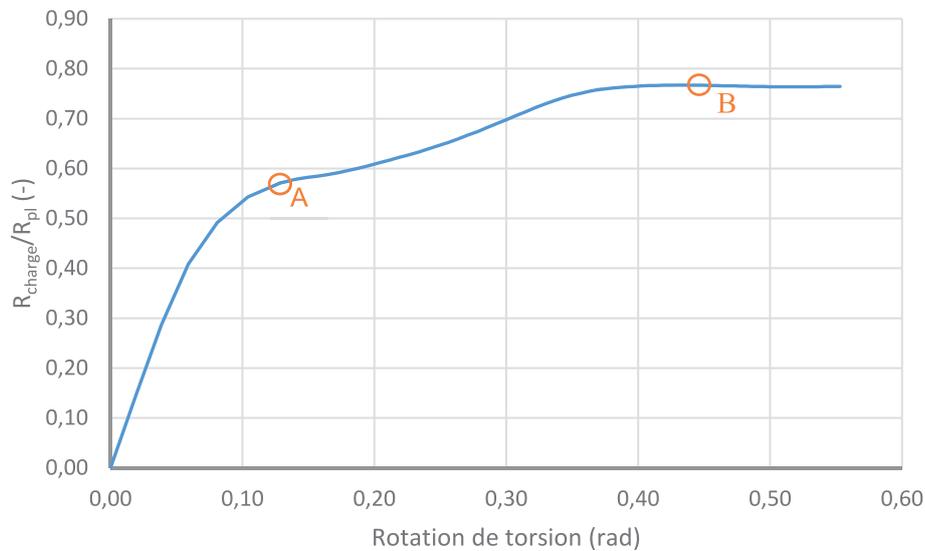


Figure 20: Courbe Charge-Rotation de torsion pour W1\_NO\_MyMz60\_EccY3

La Figure 21 et la Figure 22 représentent les contraintes de von Mises pour les points A et B de la courbe de la Figure 20. Au point A (Figure 21), la semelle supérieure a plastifié de façon similaire à la poutre W1\_NO\_MyMz60\_EccY2 quand cette dernière atteint sa charge maximale. Toutefois, il semble que la poutre W1\_NO\_MyMz60\_EccY3 possède encore suffisamment de rigidité pour « éviter » la ruine. En effet, à ce stade, elle atteint un niveau de déformation qui est lié au début de l'écroûissage. Avec l'initiation de l'écroûissage, la rigidité de la semelle supérieure et celle de la barre dans sa globalité, augmente à nouveau.

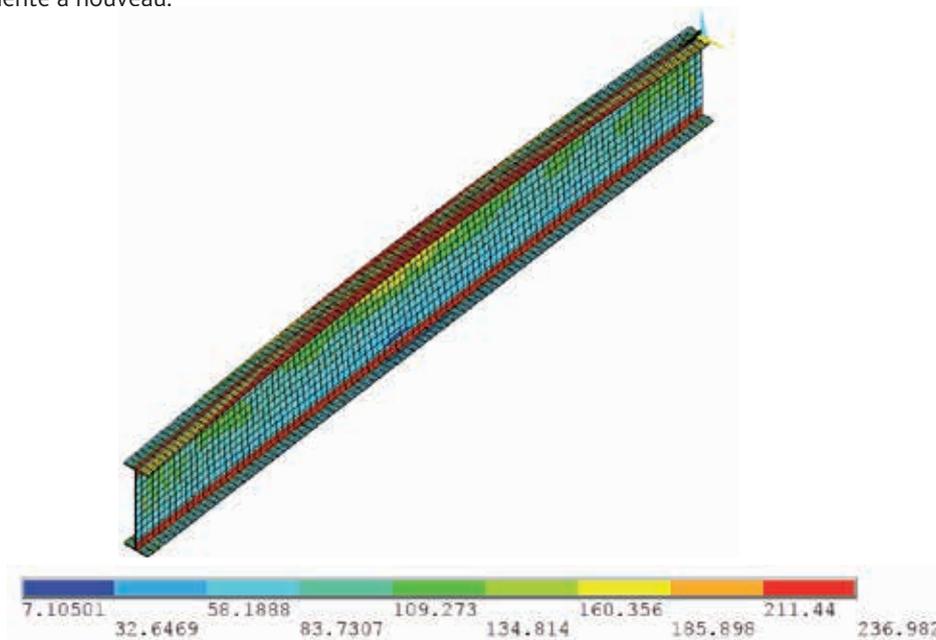


Figure 21 : Contraintes de von Mises au niveau du chargement maximal pour W1\_NO\_MyMz60\_EccY3 au point A de la Figure 20

Finalement, la Figure 22 présente les contraintes de von Mises au niveau du point B de la Figure 20. On voit que la poutre a plastifié sur une grande partie de sa longueur en raison du moment de flexion  $M_z$  (on rappelle que ce moment est constant) et due au moment de torsion de Saint-Venant qui résulte, en particulier, de la formation de la rotule plastique au gauchissement (voir référence [3]). A ce stade du chargement, la contrainte de von Mises atteint 325 MPa et, par conséquent, on note qu'un niveau important d'écroûissage a été mobilisé (pour l'acier S235 utilisé dans l'exemple). Toutefois, l'effet d'instabilité élasto-plastique conduit à la ruine de la barre.

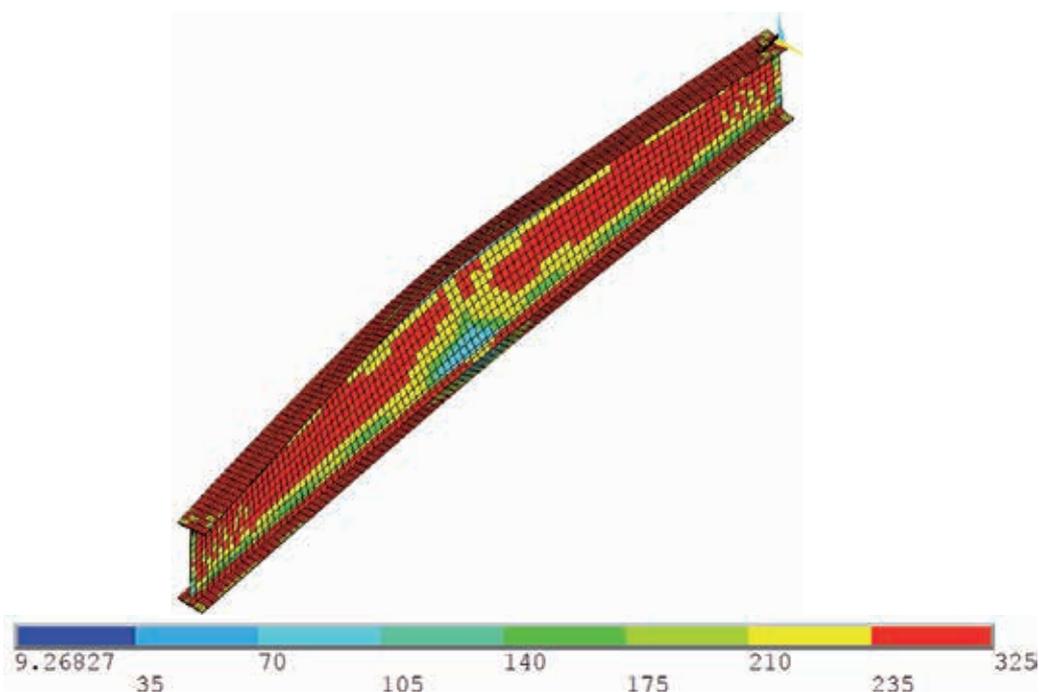


Figure 22 : Contraintes de von Mises au niveau du chargement maximal pour W1\_NO\_MyMz60\_EccY3 au point A de la Figure 20

On peut admettre que les résultats des deux exemples précédents sont très sensibles à la conception pratique des appuis réels et à l'introduction de la charge. En fonction de la conception des appuis, la première barre (W1\_NO\_MyMz60\_EccY2) pourrait atteindre la déformation nécessaire pour initier l'écroutissement. A l'inverse, on ne peut pas exclure que la conception de l'appui conduit à une ruine par instabilité élasto-plastique de la deuxième barre (W1\_NO\_MyMz60\_EccY3) avant que la déformation nécessaire pour l'écroutissement soit atteinte. Aussi, certaines hypothèses du calcul numérique peuvent également influencer le résultats (imperfections géométriques, contraintes résiduelles ...). Si on avait poursuivi le calcul de la barre W1\_NO\_MyMz60\_EccY2, l'écroutissement aurait pu être mobilisé et sa rigidité aurait augmenté pour atteindre un plus haut niveau de charge après avoir passé par un minimum local de la courbe charge-rotation de torsion. Ici, on a choisi de ne pas continuer les calculs et de considérer le premier point limite comme niveau de ruine même si cela peut être discutable pour les cas étudiés. Toutefois, on peut conclure qu'une limite basse de la résistance des barres étudiées correspond à l'instabilité élasto-plastique sans mobilisation d'un niveau important d'écroutissement. Ce mode de ruine est bien représenté par les formules d'interaction. En fonction de la conception des appuis et de l'introduction des charges, la ruine peut être liée à un niveau d'écroutissement plus important et ainsi un chargement plus important. Ce deuxième mode de ruine correspond à une limite haute de la résistance réelle des barres étudiées qui n'est pas représentée précisément par les formules d'interaction qui sont alors sécuritaires. Cependant, on peut noter que la limite haute de résistance est également liée à une rotation de torsion importante (pour la barre W1\_NO\_MyMz60\_EccY3, la rotation de torsion au point B est égale à 0,45 rad) qui, en fonction de la conception, pourrait ne pas être compatible avec les conditions de liaison de la barre dans la structure.

#### 4.4.1.3 Étude des cas non sécuritaires

En observant à nouveau la Figure 14 et la Figure 15, on s'aperçoit que les formules d'interaction sont insécuritaires pour un faible pourcentage de cas. Il est important d'analyser ces cas plus en détail. Les cas insécuritaires sont obtenus pour des barres longues dont deux exemples sont représentés à la Figure 23. Ces deux barres sont fabriquées en section HR770.5.400.17 ( $h = 770$  mm ;  $t_w = 5$  mm ;  $b_f = 400$  mm ;  $t_f = 17$  mm – section notée HR3) et elles sont soumises à de la flexion bi-axial et de la torsion. On peut voir que l'importance relative du moment de flexion  $M_z$  n'influence que faiblement les résultats (voir paragraphe 4.1). Pour les deux cas, les résultats des formules d'interaction sont assez sécuritaires pour les barres courtes en raison du comportement complexe en plasticité des barres à section ouverte soumises à de la torsion. Avec l'augmentation de l'élanement réduit, les formules d'interaction s'approchent des résultats numériques et deviennent faiblement insécuritaires. L'écart insécuritaire maximal atteint 6,8% pour la barre HR3\_NO\_MyMz15\_EccY2 avec une longueur de 12,9 m. Cet écart reste acceptable pour ce cas particulier.

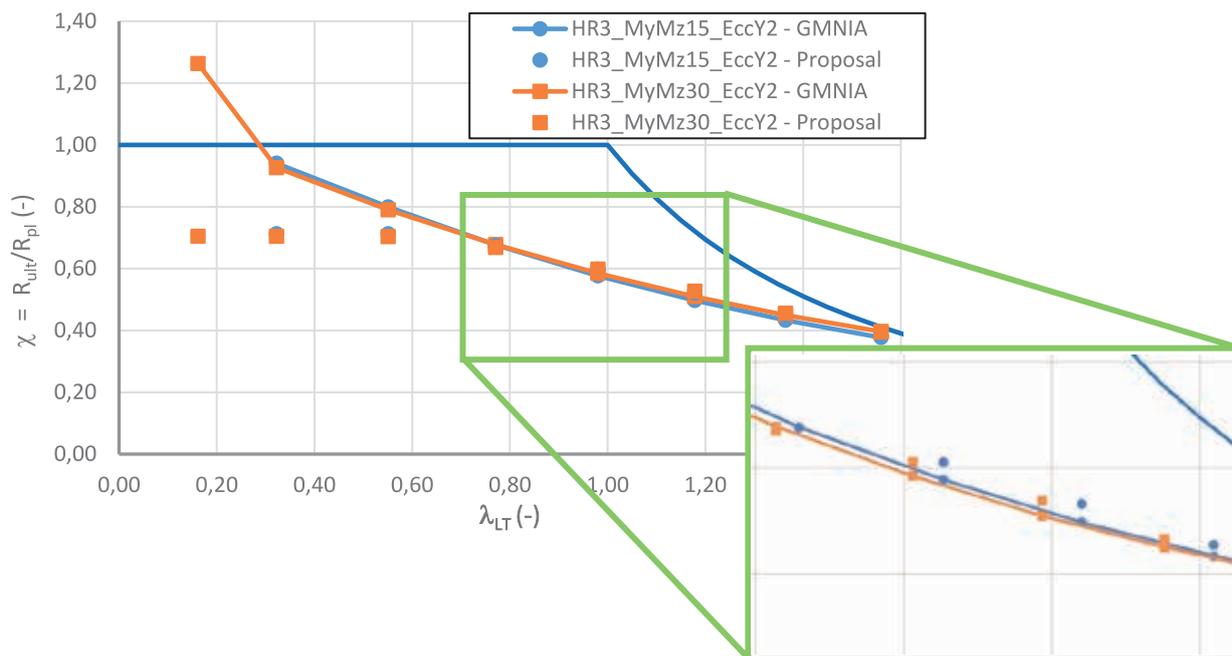


Figure 23 : Courbe de résistance de la barre en section HR 770.5.400.17 soumise à de la flexion bi-axiale et de la torsion

Aussi, il est intéressant de noter que le caractère insécuroitaire des formules d'interaction n'est pas particulièrement lié à la torsion mais plutôt au format des formules d'interaction et aux expressions initiales des facteurs d'interaction comme montré à la Figure 24. Dans ce diagramme, nous présentons des résultats pour les mêmes configurations qu'à la Figure 23 mais sans moment de torsion appliqué. Les barres sont alors soumises uniquement à de la flexion bi-axiale. Comme avant, les prédictions de résistance des formules d'interaction sont sécuritaires pour les barres courtes, mais moins qu'en cas de moment de torsion appliqué. En revanche, en augmentant l'élanement réduit, les résultats deviennent un peu plus insécuroitaires qu'en présence de torsion (jusqu'à 14%) pour des barres avec élanements intermédiaires (longueur de barre de 8,1 m et 12,9 m). Cette insécuroité des formules d'interaction (appliquées avec les facteurs d'interaction de l'actuelle Annexe B de [1]) par rapport aux résultats numériques semble alors plus importante pour les barres sans torsion. L'écart observé ici est plus important que dans d'autres études réalisées sur des barres comprimées et fléchies dans le passé, comme par exemple dans les références [6], [8], [11]. Toutefois, dans ces références, le cas de la flexion bi-axiale sans effort normal n'était pas traité en priorité.

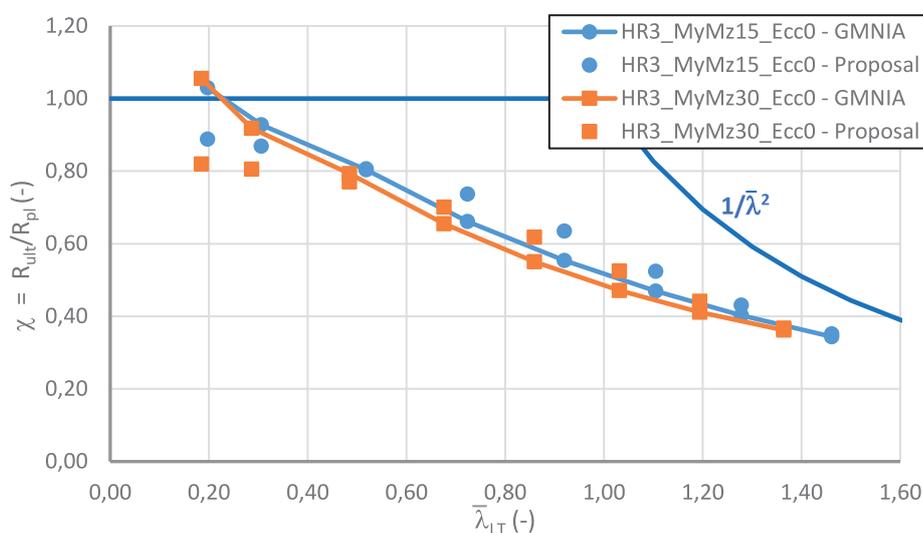


Figure 24 : Courbe de résistance de la barre avec section HR 770.5.400.17 soumise à de la flexion bi-axiale sans torsion

On peut expliquer le caractère insécuritaire des formules d'interaction sur la base du format des coefficients d'interaction  $k_{zz}$  et  $k_{yz}$  exprimés par les équations (26) et (27).

$$k_{zz} = C_{mz} \left( 1 + [2\bar{\lambda}_z - 0,6] \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rd}} \right) \quad [26]$$

$$k_{yz} = 0,6k_{zz} \quad [27]$$

Comme expliqué avant, les facteurs d'interaction tiennent compte des effets du second ordre, de la forme de l'interaction plastique en section et de la transition entre interaction plastique applicable aux barres courtes et l'interaction élastique applicable aux barres élancées (ici il s'agit bien de l'élancement de barre lié au flambement/déversement et non de l'élancement de la section lié au voilement). D'après les équations (26) et (27), on constate que les facteurs d'interaction dépendent uniquement de l'élancement réduit par rapport au flambement par flexion. Par conséquent, ils ne tiennent pas compte de l'effet d'instabilité par déversement. En cas de flexion bi-axiale, les facteurs  $k_{zz}$  et  $k_{yz}$  sont alors égaux à  $C_{mz}$  et  $0,6C_{mz}$  ( $k_{yz} = 1$  et  $k_{zz} = 0,6$  en cas de moment constant). On peut noter que les facteurs d'interaction proposés dans l'actuel Annexe A de la Partie 1-1 tiennent compte de l'effet du déversement. En effet, les paramètres qui introduisent la transition entre l'interaction plastique et élastique (facteurs  $C_{ij}$ ) sont, entre autre, liés à l'élancement réduit  $\lambda_0$  (élancement réduit de la barre soumise à un moment constant).

Dans le cas de cette étude, l'insécurité observée est acceptée étant donné que l'objectif final est de proposer une extension des formules d'interaction dans leur état actuel. Aussi, on rappelle que le niveau d'insécurité est relativement faible.

#### 4.4.1.4 Synthèse

Dans ce paragraphe, nous avons pu montrer que :

- L'extension des formules d'interaction (6.61) et (6.62) de la version actuelle de la Partie 1-1 de l'Eurocode 3 est satisfaisante pour le cas de la flexion bi-axiale combinée avec la torsion ;
- La proposition est sécuritaire pour i) des barres courtes pour lesquelles le comportement plastique ne peut pas être précisément reproduit par les formules d'interaction, ii) pour les barres possédant des élancements réduits intermédiaires si l'écroutissage est mobilisé avant que la ruine par instabilité élasto-plastique soit atteinte et iii) pour les barres longues avec section soudée pour lesquelles la courbe de réduction pour le déversement de la version actuelle de la Partie 1-1 de l'Eurocode 3 est sécuritaire ;
- La proposition peut devenir légèrement insécuritaire pour les barres sans effort normal en raison de la définition des facteurs d'interaction  $k_{yz}$  et  $k_{zz}$  qui ne tiennent pas compte de l'effet du déversement.

Dans le prochain paragraphe nous allons étudier la précision des formules d'interaction proposées pour le cas des barres soumises à un effort normal en plus de la flexion bi-axiale et de la torsion.

#### 4.4.2 Barres soumises à un effort normal de compression, de la flexion bi-axiale et de la torsion

La Figure 25 représente l'évaluation de la formule d'interaction par rapport aux simulations numériques. A nouveau, on peut observer que la proposition permet de vérifier de façon sécuritaire la résistance des barres en I soumises à une combinaison complexe d'efforts internes, y compris la torsion. On observe un très faible taux de résultats du côté de l'insécurité (0,4% des 3300 cas considérés, avec une insécurité inférieure à 5%). De plus, il apparaît que la dispersion des résultats est globalement plus faible que dans le cas des barres soumises à la flexion bi-axiale et la torsion, sans effort normal de compression. On peut comprendre cette observation étant donné que l'effort axial de compression introduit des effets du second ordre supplémentaires. Par conséquent, la barre ne peut pas mobiliser autant la réserve plastique en torsion (voir références [3] et [4]) qu'en cas de flexion bi-axiale combinée avec la torsion. Toutefois, on peut également observer que les formules d'interaction sont en général assez sécuritaires. En effet, la valeur moyenne du ratio  $R_{ult,Méthode}/R_{ult,GMNIA}$  est égale à 0,75.

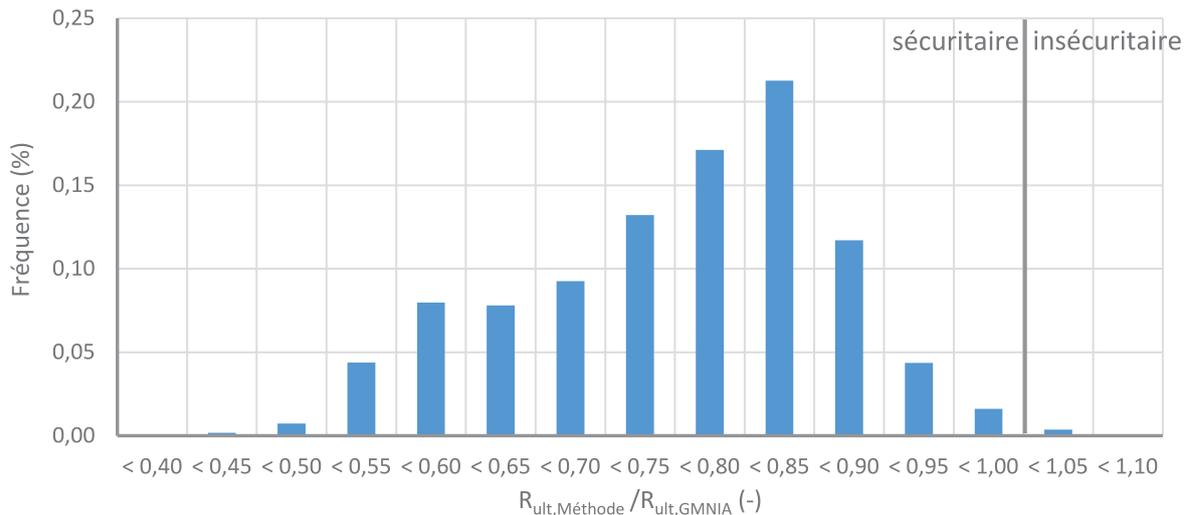


Figure 25 : Ratio entre facteur de charge obtenu par formules d'interaction et facteur de charge obtenu par GMNIA

Comme précédemment, il est intéressant d'étudier la précision des formules d'interaction en fonction de l'élanement réduit. Les barres sont maintenant sollicitées par un effort axial et un moment de flexion  $M_y$ . Il serait alors possible de se baser soit sur un élanement réduit par rapport au flambement par flexion ( $\bar{\lambda}_z$  ou  $\bar{\lambda}_y$ ) soit sur l'élanement réduit pour le déversement ( $\bar{\lambda}_{LT}$ ). Toutefois, dans la référence [3] il a été montré qu'il est plus pertinent de représenter les résultats par rapport à l'élanement global défini selon l'équation (28).

$$\bar{\lambda}_G = \sqrt{\frac{R_{pl}}{R_{cr}}} \quad (28)$$

Dans l'équation (28), le paramètre  $R_{pl}$  représente le facteur d'amplification à appliquer aux charges pour atteindre la résistance plastique de la section transversale la plus sollicitée et le paramètre  $R_{cr}$  représente le facteur d'amplification à appliquer aux charges pour atteindre l'état d'instabilité élastique. En cas de moment de flexion seul, le ratio  $R_{pl}$  est alors égal à  $M_{y,pl}/M_y$  et  $R_{cr}$  est égal à  $M_{y,cr}/M_y$ .

Les résultats de l'étude paramétrique sont représentés à la Figure 26. Cette figure représente les résultats obtenus pour les barres soumises à de la torsion et au moins un autre effort interne. En observant la Figure 26, on peut identifier quelques tendances intéressantes :

- 1) Il existe des cas très sécuritaires pour des élanements réduits importants. Ces cas, entourés en orange, correspondent à des sections soudées. On rappelle que les courbes de réduction applicables pour le déversement des sections soudées selon la Partie 1-1 de l'Eurocode 3 sont très sécuritaires.
- 2) Pour les autres cas, la Figure 26 montre que la dispersion des résultats diminue et la précision des formules d'interaction augmente avec l'élanement réduit (résultats compris dans le triangle violet à la Figure 26).

La deuxième observation peut s'expliquer à nouveau avec la complexité du comportement plastique des barres en torsion. En effet, en augmentant l'élanement réduit, les barres sont moins susceptibles de mobiliser leur réserve plastique en torsion étant donné que leur mode de ruine est caractérisé par l'instabilité élasto-plastique.

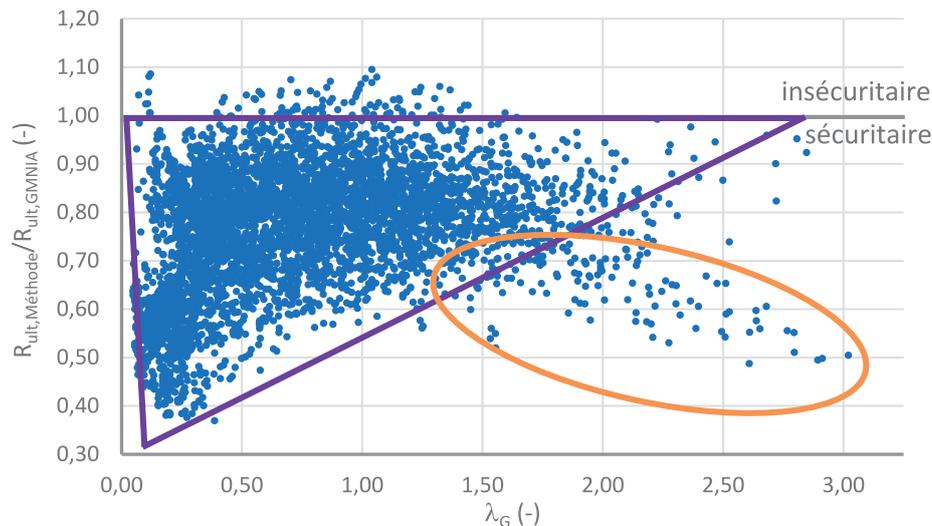


Figure 26 : Ratio entre facteur de charge obtenu par les formules d'interaction et facteur de charge obtenu par voie numérique, en fonction de l'élancement global

Afin d'analyser les résultats plus en détail, la [Figure 27](#) présente les courbes de résistance ultime de barres avec section IPE 500 soumises à un effort normal, de la flexion  $M_y$  et de la torsion avec différents ratios  $m_y/n = (M_y/M_{y,p})/(N/N_{p1})$ . On peut observer que le rapport  $m_y/n$  n'influence que faiblement les résultats. En effet, les courbes sont regroupées pour les simulations numériques et pour les formules d'interaction. On peut également observer que les formules d'interaction sont assez précises pour les barres avec un élancement réduit global intermédiaire ou important. Par conséquent, on peut conclure que les effets du second ordre et de l'instabilité élasto-plastique sont couverts de façon satisfaisante par les formules d'interaction. En revanche, pour des barres courtes, l'écart entre les simulations numériques et les formules d'interaction augmente. Comme précédemment, cette différence résulte de la complexité du comportement plastique en torsion des barres en I. Finalement, il semble intéressant d'étudier le cas de la barre uniquement soumise à l'effort axial de compression et de la torsion ( $m_y/n = 0$ ). On s'aperçoit que les résultats numériques pour cette configuration sont jusqu'à 10% plus favorables que pour les barres qui sont également soumises à un moment de flexion  $M_y$ . On peut expliquer ce constat par les effets du second ordre générés par l'effort axial et le moment de flexion. En effet, l'effort axial de compression conduit naturellement à une ruine par flambement par flexion autour de l'axe z. Etant donné que l'effort axial critique de flambement par torsion est beaucoup plus important que l'effort normal critique de flambement par flexion, les effets du second ordre susceptibles d'amplifier la rotation de torsion et le bi-moment sont relativement faibles. En revanche, si les barres sont également soumises à un moment de flexion, l'effet du déversement amplifie la rotation de torsion et le bi-moment, ce qui conduit à une réduction de la résistance plus importante pour un même élancement global de la barre.

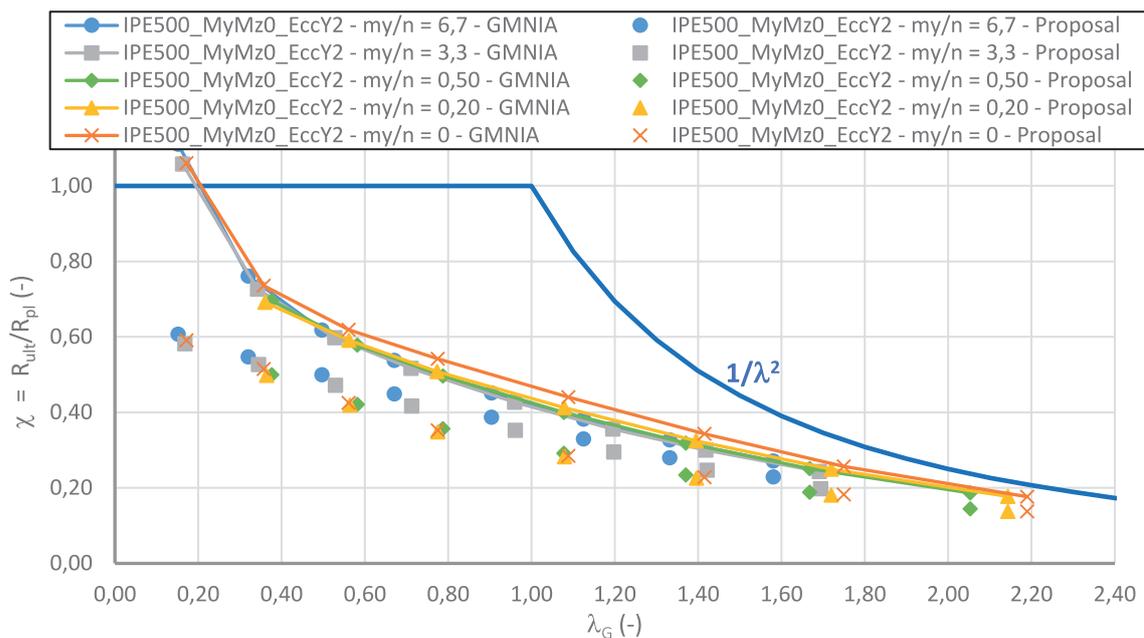


Figure 27 : Courbes de résistance pour des barres à section IPE 500 soumises à une combinaison d'effort axial, de flexion  $M_y$  constant et de torsion

Finalement, il est intéressant d'étudier en détail des barres soumises à une combinaison d'effort axial, de flexion bi-axiale et de torsion. La Figure 28 représente ces résultats pour l'exemple de barres IPE 500. Comme pour les barres de la Figure 27, on peut constater que les formules d'interaction sont à nouveau suffisamment précises pour les barres élancées. En revanche, la résistance des barres courtes, pour lesquelles la plastification est importante avant la ruine, est prédite de façon assez sécuritaire. Toutefois, on rappelle ici qu'il n'est pas possible de tenir précisément compte du comportement plastique (et en particulier de la redistribution des efforts internes résultant de la torsion) par une simple analyse élastique de la barre.

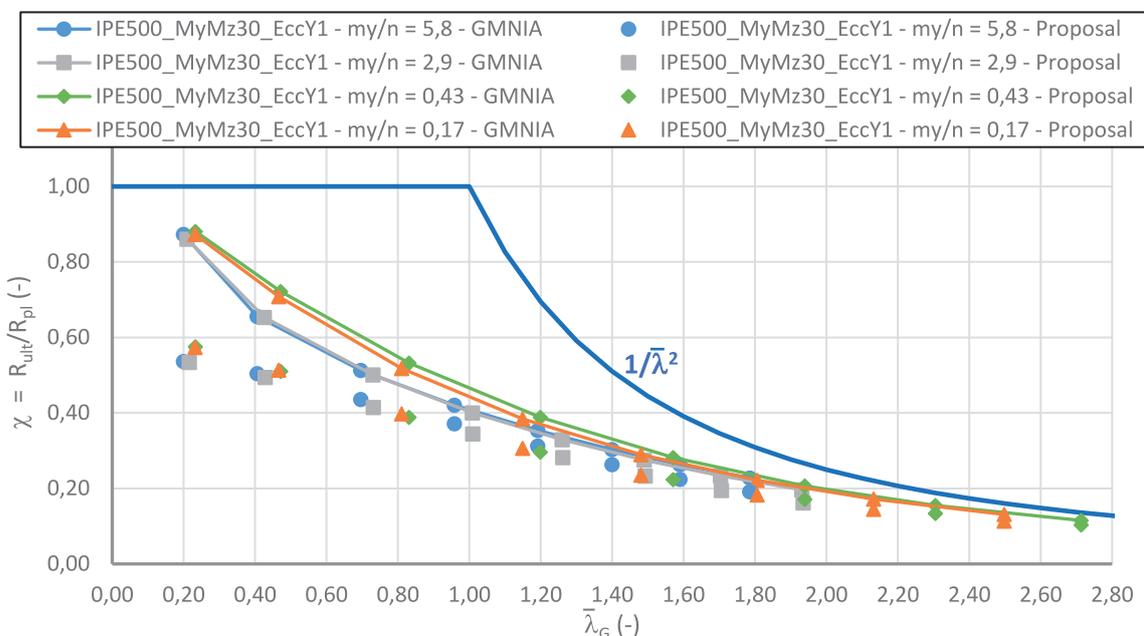


Figure 28 : Courbes de résistance pour des barres IPE 500 soumises à une combinaison d'effort axial, de flexion bi-axiale constante et de torsion

Afin d'évaluer les formules d'interaction de façon quantitative, le **Tableau 6** représente certains indicateurs statistiques. D'abord, on peut observer que les résultats des formules d'interaction obtenus pour les barres sans torsion sont légèrement moins précis et plus sécuritaires que ce qui a été montré dans des études antérieures (voir références [6] et [11]). Cependant, ces études ont été effectuées avec un nombre plus faible de sections et de configurations. Par conséquent, il n'est pas surprenant de trouver une dispersion des résultats plus importante dans le cadre de l'étude présentée ici. Le **Tableau 6** montre à nouveau que les formules d'interaction peuvent devenir insécuritaires si la barre est soumise à de la flexion bi-axiale. Les raisons qui conduisent à cette insécurité ont été discutées au paragraphe 4.4.1.

Pour les barres soumises à de la torsion, les résultats du **Tableau 6** conduisent aux constatations suivantes :

- Les résultats obtenus pour les barres soumises à de la torsion sont plus sécuritaires que les résultats pour les barres sans torsion en raison de l'importance de la réserve plastique en torsion qui ne peut pas entièrement être exploitée par l'analyse élastique des barres. Cet effet est plus prononcé pour les barres soumises à une interaction entre effort normal  $N$ , moment de flexion  $M_z$  et moment de torsion,
- L'écart type lié aux résultats des formules d'interaction pour les barres soumises à la torsion est proche de la valeur obtenue pour les barres sans torsion. Toutefois, pour les barres avec interaction flexion bi-axiale et torsion, la valeur de l'écart type est assez élevée. Cette observation est le résultat de deux tendances contraires : pour des barres courtes, la réserve plastique en torsion conduit à des résultats sécuritaires, alors que pour les barres longues, les coefficients d'interaction  $k_{yz}$  et  $k_{zz}$  ne tiennent pas compte de l'influence du moment de flexion  $M_y$ , ce qui peut conduire à des résultats légèrement insécuritaires,
- L'insécurité maximale des résultats obtenus pour les barres en torsion est de 10%. Cette valeur est inférieure à celle obtenue pour les barres non soumises à de la torsion. En raison du très faible taux de cas insécuritaires et du taux de dépassement, on peut accepter cette insécurité.

Cas de charge	Barres <u>soumises</u> à de la torsion				Barres <u>non-soumises</u> à de la torsion			
	Ratio $R_{ult,Méthode}/R_{ult,GMNIA}$				Ratio $R_{ult,Méthode}/R_{ult,GMNIA}$			
	Moyenne	Écart type	Min	Max	Moyenne	Écart type	Min	Max
$N+M_y(+M_x)$	0,77	0,11	0,45	1,05	0,88	0,10	0,67	1,04
$N+M_z(+M_x)$	0,65	0,11	0,42	1,04	0,88	0,12	0,48	1,11
$M_y+M_z(+M_x)$	0,77	0,16	0,37	1,10	0,86	0,11	0,52	1,17
$N+M_y+M_z(+M_x)$	0,76	0,10	0,43	1,09	0,84	0,10	0,50	1,13
Global	0,75	0,13	0,37	1,10	0,86	0,11	0,48	1,17

Tableau 6 : Evaluation des formules d'interaction pour les barres avec et sans torsion

Il est également intéressant de présenter les résultats du **Tableau 6** en fonction de l'élançement global comme montré au **Tableau 7**. Il est clair que la dispersion est homogène indépendamment de l'élançement réduit. Seulement pour les barres courtes l'écart-type est légèrement plus élevé en raison des effets liés à la plasticité des barres en torsion. Toutefois, la valeur de 0,135 reste acceptable. On s'aperçoit également que la moyenne du ratio  $R_{ult,Méthode}/R_{ult,GMNIA}$  est assez faible pour les barres courtes. Avec l'augmentation de l'élançement les résultats des formules d'interaction s'approchent des résultats des simulations numériques. Pour les barres très élancées, les formules d'interaction deviennent plus sécuritaires à nouveau en raison de l'attribution des courbes de réduction défavorables pour le déversement des sections soudées.

Elancement réduit global	Barres <u>soumises</u> à de la torsion - Ratio $R_{ult,Méthode}/R_{ult,GMNIA}$			
	Moyenne $\mu$	Ecart type $\sigma$	Coefficient de variation	$\mu + 3\sigma$
$\lambda \leq 0,30$	0,640	0,135	0,211	1,045
$0,30 < \lambda \leq 0,60$	0,764	0,117	0,153	1,115
$0,60 < \lambda \leq 1,00$	0,807	0,100	0,124	1,107
$1,00 < \lambda \leq 1,50$	0,814	0,091	0,112	1,087
$1,50 < \lambda$	0,775	0,105	0,135	1,090

Tableau 7 : Evaluation des formules d'interaction pour les barres soumises à de la torsion

La dernière colonne du [Tableau 7](#),  $\mu + 3\sigma$ , représente une première estimation du coefficient partiel  $\gamma_{M1}$  nécessaire pour obtenir le niveau de sécurité défini dans l'EN 1990. On peut s'apercevoir que la valeur obtenue est plus faible que la valeur qui résulte de formules d'interaction appliquées aux barres sans torsion (voir [Tableau 6](#) ; par exemple  $N+M_y : 0,86 + 3*0,10 = 1,16$ ). Par conséquent, cette estimation confirme que la proposition assure le niveau de sécurité nécessaire en appliquant la valeur du coefficient partiel applicable aux barres non soumises à la torsion.

On peut conclure que l'évaluation quantitative des formules d'interaction à l'aide du [Tableau 6](#) et du [Tableau 7](#) confirme les résultats représentés à la [Figure 26](#). Globalement, la proposition est satisfaisante pour traiter le cas complexe de la stabilité des barres soumises à une combinaison d'effort axial, de flexion bi-axiale et de la torsion. Toutefois, pour les barres courtes, les résultats deviennent assez sécuritaires étant donné que la réserve plastique en torsion des barres en I n'est pas totalement exploitée ici.

## 5 | CONCLUSIONS

Le présent article a présenté une partie du développement nécessaire pour l'extension des formules d'interaction (6.61) et (6.62) de la version actuelle de la Partie 1-1 de l'Eurocode 3 aux cas des barres soumises à de la torsion. Nous avons pu montrer que les effets du second ordre amplifiant le bi-moment sont similaires aux effets du second ordre qui amplifient le moment de flexion  $M_z$  agissant autour de l'axe de faible inertie. En particulier, on peut constater que :

- L'amplification par les effets du second ordre résultant du moment  $M_y$  est identique pour le bi-moment et pour le moment  $M_z$ .
- L'amplification par les effets du second ordre résultant de l'effort axial  $N$  est lié au flambement par torsion pour le bi-moment tandis que cette amplification résulte du flambement par flexion autour de l'axe  $z$  pour le moment  $M_z$ .

Dans un souci de simplification, nous proposons de lier l'amplification du bi-moment également au flambement autour de l'axe  $z$ , ce qui permet l'utilisation du même format pour les facteurs d'interaction  $k_{yB}$  et  $k_{zB}$  que pour les facteurs d'interaction  $k_{yz}$  et  $k_{zz}$ . Dans la référence [4], nous avons déjà montré que la forme de l'interaction plastique entre effort axial  $N$ , moment de flexion  $M_y$  et bi-moment est identique à l'interaction plastique entre effort axial, moment de flexion  $M_y$  et moment de flexion  $M_z$ , ce qui justifie davantage notre choix du format des expressions.

Dans la deuxième partie de cet article, nous avons validé notre proposition de formules d'interaction par rapport à un nombre important de simulations numériques (plus que 5 000) de type GMNIA. Cette validation a mis en évidence que :

- Les formules d'interaction proposées assurent un niveau de sécurité satisfaisant ;
- Le niveau de sécurité est assez important pour les barres courtes en raison de la réserve plastique en torsion des barres en I qui ne peut pas être exploitée dans une vérification simplifiée à l'aide de formules d'interaction (qui sont généralement appliquées après une analyse élastique de la barre),
- La précision des formules d'interaction augmente avec l'élançement réduit global des barres soumises à la torsion étant donné que la ruine des barres est atteinte avant que la réserve plastique soit mobilisée. Pour ces barres, les effets du second ordre résultant de la ruine par instabilité élasto-plastique sont suffisamment bien couverts par les facteurs d'interaction  $k_{yB}$  et  $k_{zB}$  proposés.

## 6 | RÉFÉRENCES

- [1] NF EN 1993-1-1, « Eurocode 3 – Calcul des structures en acier – Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments », Indice de classement AFNOR P 22-311-1, Octobre 2005.
- [2] L. Davaine, P. O. Martin, « Vérification d'une section non raidie selon l'Eurocode 3 Partie 1-5 – Comparaison des méthodes de calcul par largeurs efficaces », *Revue Construction Métallique*, n°4, 2015.
- [3] A. Beyer, « Résistance des barres en acier à section ouverte soumises à une combinaison d'effort normal, de flexion et de torsion », Thèse de doctorat de l'Université de Lorraine, Novembre 2017.
- [4] A. Beyer, A. Bureau, N. Boissonnade, A. Khelil, « Interaction plastique entre effort normal, flexion bi-axial et torsion pour une section en I doublement symétrique » *Revue Construction Métallique*, n°2, 2018.
- [5] N. Boissonnade, J.-P. Jaspard, J.-P. Muzeau, M. Villette, « Improvement of the interaction formulae for beam columns », *Computers & Structures* 80, 2002, 2375-2385.
- [6] TC8 CECM, « Rules for Member Stability in EN 1993-1-1: Background documentation and design guidelines », 2006.
- [7] J. C. Naumes, « Biegeknicke und Biegedrillknicken von Stäben und Stabsystemen auf einheitlicher Grundlage » (Flambement par flexion et déversement de barres et structures de barres étudiée sur une base théorique commune), thèse de doctorat, RWTH Aachen, 2009.
- [8] M. Villette, « Analyse critique du traitement de la barre comprimée fléchie et propositions de nouvelles formulations », thèse de doctorat, Université de Liège, 2004.
- [9] TC8 CECM, « Ultimate Limit State Calculation of Sway Frames with Rigid Joints », 1984.
- [10] NF EN 1993-1-5, « Eurocode 3 – Calcul des structures en acier – Partie 1-5 : Plaques planes », Indice de classement AFNOR P 22-315, Mars 2007.
- [11] J. Lindner, « Evaluation of interaction formulae for level 1 approach with regard to ultimate load calculations and test results – flexural buckling and lateral torsional buckling », CECM TC 8, publication n°TC8-2001-17, 2001.
- [12] Offner, R., « Traglasten von Stäben aus Stahl bei Druck und Biegung » (Résistance de barres en acier soumises à la compression et à la flexion), thèse de doctorat, TU Graz, 1997.
- [13] Kaim, P., « Spatial buckling behaviour of steel members under bending and compression », thèse de doctorat, TU Graz, 2004.
- [14] Kettler, M., « Elastic-Plastic Cross-Sectional Resistance of Semi-Compact H-and Hollow Sections », Ph.D. thèse de doctorat, TU Graz, 2008.
- [15] A. Beyer, A. Bureau, N. Boissonnade, A. Khelil, « Étude expérimentale et numérique de l'interaction  $M_y-V_z$  des sections en I », *Revue Construction Métallique*, n°4, 2017.
- [16] E. Mirambell, J. Bordallo, E. Real, « Torsion and its interaction with other internal forces in EN 1993-1-1 – a new approach », *Steel Construction* 9/3, 2016.
- [17] S. Baraka, A. Bureau, « Calcul des contraintes dans un élément soumis à la torsion », *Revue construction métallique*, n°1, 2000.
- [18] M. Villette, « Calcul approché de l'inertie de torsion d'une section en I ou en T », *Revue construction métallique*, n°1, 2011.
- [19] T. M. Nguyen, « Formulaire des contraintes dues à la torsion dans une poutre à section ouverte », *Revue construction métallique*, n°4, 2013.
- [20] V. Z. Vlassov, « Thin walled elastic beams », National Technical Information Service, 2<sup>nd</sup> Edition, 1984