

Collection **ctim**

La résistance des matériaux



Yvon LESCOUARC'H
Philippe BEGUIN

Collection **ctim**

La résistance des matériaux

ISBN 978-2-902720-40-8

**Cette deuxième édition
de maquette et de mise en page
a été entièrement revue**

**Première édition :
CTICM, 1995**

**© CTICM 2014
ISBN 978-2-902720-40-8**

Dans la même collection :

LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX Exercices corrigés CTICM, 1995

Ce manuel présente les solutions des exercices dont les énoncés sont donnés en fin de chaque chapitre du présent ouvrage.

Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L.122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4). « Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. Il est interdit de reproduire intégralement ou partiellement la présente publication sans autorisation du Centre Français d'exploitation du droit de Copie (CFC - 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris. Tél. : 01 44 07 47 70, Fax : 01 46 34 67 19).


Construire en métal, un art, notre métier

Centre Technique Industriel de la Construction Métallique
Espace technologique L'orme des merisiers
Immeuble Apollo – 91193 Saint-Aubin
Téléphone : 01 60 13 83 00 • www.cticm.com • E-mail : publication@cticm.com

LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Un outil indispensable pour la conception d'ouvrage

Les principes et méthodes

Par

Yvon LESCOUARC'H

Ingénieur E.C.P., Master of Science, Docteur-ingénieur
professeur à l'ENSA Paris-Val de Seine
et à l'ENPC

et

Philippe BEGUIN

Ingénieur civil des constructions de l'université de Liège
chef de projets recherche au CTICM

Deuxième édition 2014

cticm
Construire en métal, un art, notre métier

Avant-propos

Le présent ouvrage est accessible à tous ceux qui veulent acquérir les connaissances de base en résistance des matériaux sans entrer dans des développements mathématiques ou théoriques: candidats à certains bacs techniques ou professionnels, étudiants en écoles d'architecture, techniciens dans le domaine de la construction se perfectionnant dans le cadre de stages de formation continue,

Les notions de mathématiques auxquelles il est fait appel sont simples et exposées dans le premier chapitre. Il n'est pas fait usage de dérivées, différentielles, intégrales, calcul matriciel, et cependant toutes les bases de résistance des matériaux nécessaires à la compréhension du comportement des structures et aux calculs courants sont présentées, d'une manière claire et rigoureuse. Aux démonstrations théoriques, ont été préférées des explications physiques, concrètes.

Les auteurs ont acquis une expérience en enseignant cette matière à des étudiants en écoles d'architecture ainsi qu'à des techniciens en stages de formation continue.

Dans cet ouvrage ont été adoptées la terminologie, les conventions et les notations désormais communes à tous les matériaux (acier, béton) définies dans les normes françaises (Afnor), européennes (EN) ou internationales (ISO); elles diffèrent parfois des habitudes acquises de longue date dans chaque profession. Ce manuel donne donc des bases applicables à tous les matériaux, qui permettent en particulier de comprendre le fonctionnement des structures et d'aborder tous les règlements actuels de construction.

Ce livre est le premier d'une série à paraître sur des sujets proches et complémentaires: exercices corrigés de résistance des matériaux, note de calcul d'un bâtiment à ossature métallique, initiation à la conception et au calcul réglementaire des charpentes métalliques...

Janvier 1995

à Laura (Y.L.)

Cet ouvrage a abouti grâce à la contribution de plusieurs personnes que nous tenons à remercier :

Jean-Daniel Antropius, ingénieur-conseil, Jean-Pierre Boissy, professeur au lycée technique, Yves Thépot de Quimper et Ivor Ryan, ingénieur principal au CTICM, qui ont participé, par leurs remarques, à la préparation et à la mise en forme du contenu de ce livre,

Valérie Perrin qui a assuré avec gentillesse la lourde tâche de saisie de texte et de mise en page, Yves Massin qui a mené avec efficacité les opérations d'édition,

Pierrette Cambois qui a soutenu avec une conviction encourageante ce projet dans toutes ses phases.

Nous voulons exprimer ici notre vive reconnaissance à toutes ces personnes, ainsi qu'au CTICM qui en assure la publication.

Yvon Lescouarc'h

Philippe Beguin

Sommaire

AVANT-PROPOS	5
SYMBOLES UTILISÉS	10
I. RAPPELS DE MATHÉMATIQUES	13
1. DÉFINITIONS.....	13
2. CALCUL ALGÈBRE.....	15
3. ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.....	18
4. ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.....	22
5. FONCTIONS.....	23
6. SYSTÈMES D'INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.....	31
8. AIRES ET VOLUMES.....	40
9. NOTION DE VECTEUR.....	42
10. EXERCICES.....	45
II. NOTIONS DE FORCE ET DE COUPLE	47
1. NOTION DE FORCE - SES EFFETS.....	47
2. NATURE ET CARACTÉRISTIQUES DES FORCES.....	47
3. REPRÉSENTATION D'UNE FORCE.....	48
4. DÉCOMPOSITION D'UNE FORCE.....	49
5. MOMENT D'UNE FORCE.....	50
6. NOTION DE COUPLE DE FORCES.....	51
7. RÉSULTANTE DE FORCES CONCURRENTES.....	52
8. RÉSULTANTE DE FORCES PARALLÈLES.....	52
9. FORCE DE PESANTEUR.....	53
10. EXERCICES.....	54
III. ÉQUILIBRE D'UNE STRUCTURE	55
1. DÉFINITION.....	55
2. ACTIONS, EFFORTS DE LIAISON.....	55
3. SOLIDE SOUMIS À DES FORCES CONCURRENTES.....	57
4. STRUCTURE SOUMISE À DES FORCES PARALLÈLES.....	57
5. STRUCTURE SOUMISE À DES FORCES ET COUPLES QUELCONQUES.....	58

6. EXERCICES	60
IV. SOLLICITATION DANS UNE SECTION	63
1. DÉFINITIONS ET HYPOTHÈSES RELATIVES AUX BARRES	63
2. DÉFINITION DES SOLLICITATIONS.....	64
3. TRACE DES DIAGRAMMES DE SOLLICITATIONS	65
4. ISOSTATICITÉ ET HYPERSTATICITÉ DES STRUCTURES	70
5. EXERCICES	73
V. NOTION DE CONTRAINTE.....	77
1. DÉFINITION D'UNE CONTRAINTE	77
2. CONTRAINTES NORMALES, CONTRAINTES DE CISAILLEMENT.....	77
3. RELATIONS ENTRE CONTRAINTES ET SOLLICITATIONS.....	78
4. EXERCICES	79
VI. COMPORTEMENT ET CARACTÉRISTIQUES DES MATÉRIAUX	81
1. INTRODUCTION	81
2. LE MATÉRIAU ACIER.....	81
3. LE MATÉRIAU BÉTON	86
4. EXERCICE	88
VII. CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES DES SECTIONS	89
1. INTRODUCTION	89
2. AIRE D'UNE SECTION.....	89
3. MOMENT STATIQUE.....	90
4. CENTRE GRAVITE	93
5. MODULE DE RÉSISTANCE PLASTIQUE DES SECTIONS SYMÉTRIQUES	94
6. MOMENT D'INERTIE.....	96
7. MODULE DE RÉSISTANCE ÉLASTIQUE.....	99
8. RAYON DE GIRATION	100
9. UTILISATION DES CATALOGUES	101
10. EXEMPLE COMPLET.....	103
11. EXERCICES	105

VIII. CONTRAINTES DANS LES SECTIONS DE BARRES ÉLASTIQUES.....	107
1. INTRODUCTION	107
2. TRACTION OU COMPRESSION	107
3. FLEXION PURE	108
4. FLEXION ET EFFORT TRANCHANT (FLEXION SIMPLE)	111
5. FLEXION ET EFFORT NORMAL.....	115
6. EXERCICES	118
IX. RÉSISTANCE PLASTIQUE DES SECTIONS	119
1. EFFORT NORMAL DE PLASTIFICATION	119
2. EFFORT TRANCHANT DE PLASTIFICATION.....	119
3. MOMENT DE PLASTIFICATION.....	120
4. SOLLICITATIONS COMBINÉES	121
5. EXERCICES	122
X. DÉFORMATION DES POUTRES EN ÉLASTICITÉ	123
1. INTRODUCTION	123
2. RELATION EFFORTS LOCAUX - DÉFORMATIONS LOCALES.....	123
3. FORMULAIRES	125
4. IMPORTANCE RELATIVE DES DÉFORMATIONS.....	128
5. FLÈCHES DES POUTRES SUR DEUX APPUIS	129
6. EXERCICE	132
XI. CALCUL DES STRUCTURES PAR ORDINATEUR.....	135
1. INTRODUCTION	135
2. ENTRÉES DES DONNÉES	136
3. MODULE PRINCIPAL.....	138
4. SORTIES DES RÉSULTATS	138
5. EXEMPLE.....	140

Symboles utilisés

Les principaux symboles utilisés, conformes aux Eurocodes, sont les suivants :

CHARGES

G	: Charges permanentes
Q	: Charges d'exploitation
S	: Charges de neige
W	: Charges de vent
F	: Force concentrée
q	: Force répartie

SOLLICITATIONS

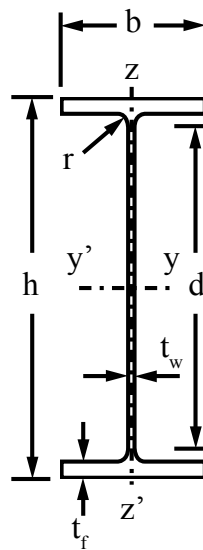
M	: Moment de flexion
N	: Effort axial (aussi appelé effort normal)
V	: Effort tranchant
T	: Moment de torsion

CARACTÉRISTIQUES DU MATÉRIAU

E	: Module d'élasticité longitudinale
ν	: Coefficient de Poisson
f_y	: Contrainte limite d'élasticité
f_u	: Résistance à la traction
μ	: Coefficient de frottement
α	: Coefficient de dilatation thermique

CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES DES SECTIONS

A	: Aire
I	: Moment d'inertie de flexion (ou inertie)
W_{el}	: Module de résistance élastique de la section
W_{pl}	: Module de résistance plastique de la section
i	: Rayon de giration
d	: Diamètre
t	: Épaisseur
t_f	: Épaisseur de semelle
t_w	: Épaisseur d'âme
$x'x$: Axe longitudinal de la barre
$y'y$: Axe parallèle aux semelles
$z'z$: Axe perpendiculaire aux semelles



AUTRES SYMBOLES

σ	: Contrainte normale
τ	: Contrainte tangente (ou de cisaillement)
ε	: Déformation
σ_{cr}	: Critique
λ	: Élancement
α, β, θ	: Angles
ρ	: Masse volumique

1 Rappels de mathématiques

1. DÉFINITIONS

1.1. Nombres entiers, nombres réels

Les nombres entiers sont les nombres obtenus en ajoutant ou en retranchant des unités au nombre zéro.

Les nombres réels sont l'ensemble des nombres, permettant par exemple de mesurer une grandeur physique, affectés d'un signe.

Exemples de nombres réels: 0 ; $+5$; $15,42$; $-4/3$; $\sqrt{30}$

Pour les entrées de données sur ordinateur:

- un nombre entier est composé :

- d'un signe $+$ ou $-$ (lorsque le nombre est positif, le signe peut être omis : $+4$ ou 4 sont interprétés de la même façon par l'ordinateur),
- de chiffres constituant le nombre, sans aucun séparateur entre ces chiffres (ni espace, ni point, ni virgule).

- un nombre réel est composé :

- d'un signe $+$ ou $-$ (lorsque le nombre est positif, le signe peut être omis),
- de chiffres constituant la partie entière du nombre, sans aucun séparateur entre ces chiffres,
- d'un point obligatoire, séparant la partie entière de la partie décimale éventuelle du nombre,
- de chiffres constituant la partie décimale du nombre, chiffres pouvant être omis si la partie décimale est nulle.

Exemples: – nombres entiers: 0 ; 5 ; $+10$; 25

– nombres réels: 0 ; $5,2$; $+10$; -25 ; $1954,23$

1.2. Symboles mathématiques

\neq	signifie « différent »,
\approx	signifie « peu différent »,
$>$	signifie « supérieur »,
\geq	signifie « supérieur ou égal »,
$<$	signifie « inférieur »,
\leq	signifie « inférieur ou égal »,
$ a $	signifie « valeur absolue de a », c'est-à-dire la valeur de a avec un signe positif,
\Rightarrow	signifie « entraîne » ou « implique ».

Exemples de relations vraies :

$$3 \neq 4$$

$$4 > 3$$

$$3 < 4$$

$$|3| = 3$$

$$a > b \Rightarrow b < a$$

$$4 \geq 3$$

$$3 \leq 4$$

$$|-4| = 4$$

$$4 \geq 4$$

$$3 \leq 3$$

1.3. Exposants

Nous désignons par

a	un nombre réel,
n	un nombre entier,
r	un nombre réel.

Par définition :

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}}$$

$$a^{1/2} = \sqrt{a} \quad (a \text{ doit être positif ou nul})$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}}}$$

a^r : nombre dont la valeur peut être obtenue par une calculatrice en utilisant la touche y^x .

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

Exemples :

$$3^0 = 1$$

$$4^1 = 4$$

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

$$4^{0.5} = 4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$$

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0,04$$

$$2,3^2 = 2,3 \times 2,3 = 5,29$$

$$3^{2,4} = 13,96666$$

($3^{2,4}$ est compris entre $3^2 = 9$ et $3^3 = 27$)

$$2,3^{-1,7} = \frac{1}{2,3^{1,7}} = \frac{1}{4,12} = 0,2427$$

($2,3^{1,7}$ est compris entre $2,3^1 = 2,3$ et $2,3^2 = 5,29$)

2. CALCUL ALGÈBRE

2.1. Règles des signes et priorité des opérateurs

- Pour une somme ou une différence de nombres contenus dans une parenthèse :
 - s'il y a un signe + devant la parenthèse, on peut supprimer ce signe et cette parenthèse sans changer les signes des nombres,
 - s'il y a un signe – devant la parenthèse, on peut supprimer ce signe et cette parenthèse en changeant les signes de tous les nombres.

Exemples :

$$+ (-5 + 4 - 3) = -5 + 4 - 3$$

$$- (-5 + 4 - 3) = +5 - 4 + 3$$

$$- (6) + (-4) - (2 - 3) + (5) = -6 - 4 - 2 + 3 + 5$$

- Lorsque l'on fait le produit ou le quotient de plusieurs nombres, le résultat est positif s'il y a un nombre pair (0, 2, 4, 6,...) de signes négatifs. Il est négatif dans le cas contraire.
- Lorsqu'on est en présence d'une suite de nombres séparés par des opérateurs, on doit effectuer les multiplications et les divisions avant de faire les additions et les soustractions.

Exemples :

$$(-2) \times (-3) = +6$$

$$(-5) \times (-2) \times (3) / (-3) = -5 \times 2 \times 3 / 3 = -10$$

$$(+5) \times (-3) \times (-2) \times (-2) \times (+4 - 2) = -5 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = -120$$

$$(-5) / (-2) = 5/2 = 2,5$$

$$+5 - 3 \times 2 - 12/3 + 2 - 5 \times 2 = +5 - 6 - 4 + 2 - 10 = -13$$

2.2. Valeurs absolues

Lorsqu'une expression mathématique contient une valeur absolue, on doit d'abord calculer la valeur de l'expression contenue dans le symbole $|\cdot|$, puis affecter au résultat le signe + et supprimer le symbole $|\cdot|$.

Exemples :

$$|3 - 5| = |-2| = 2$$

On ne peut pas écrire $|3 - 5| = |3| - |5|$ puisque $|3| - |5| = -2$

On ne peut pas écrire $|3 - 5| = |3| + |-5|$ puisque $|3| + |-5| = 8$

$$\begin{aligned} |5 - 7| - |-3| + |4| - |-7 + 2| &= |-2| - |-3| + |4| - |-5| \\ &= 2 - 3 + 4 - 5 \\ &= -2 \end{aligned}$$

2.3. Exposants

Si a , b , p et r désignent des nombres réels, les règles suivantes s'appliquent :

$$a^p \times a^r = a^{p+r}$$

$$(a^p)^r = a^{pr}$$

$$a^p / a^r = a^{p-r}$$

$$(a \times b)^r = a^r \times b^r$$

$$(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Par ailleurs, il est utile de retenir les résultats suivants :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$$

Exemples :

$$2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$$

$$(2^2)^3 = 2^{2 \times 3} = 2^6 = 64$$

$$(2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3 = 8 \times 125 = 1000$$

$$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$$

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

$$(6x^2 + x + 2)(2x - 1) = 6x^2(2x - 1) + x(2x - 1) + 2(2x - 1)$$

$$= 12x^3 - 6x^2 + 2x^2 - x + 4x - 2$$

$$= 12x^3 - 4x^2 + 3x - 2$$

2.4. Fractions

Les règles suivantes s'appliquent aux sommes, produits ou quotients de fractions :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ on peut écrire : $ad = bc$

Exemples :

$$\frac{3}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{3} = \frac{3 \times 3 + 2 \times 5}{2 \times 3} = \frac{19}{6} \approx 3,333$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{3 \times 5}{2 \times 3} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$\frac{3}{2} / \frac{5}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{2 \times 5} = \frac{9}{10} = 0,9$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow 3x = 2y$$

2.5. Égalités, inégalités

Lorsqu'on est en présence d'une égalité ou une inégalité entre des sommes ou différences de termes, on peut transférer un terme d'un côté à l'autre du symbole d'égalité ou d'inégalité, à condition de changer le signe de ce terme.

Exemples :

$$a + 3 = 3b + 5 \Rightarrow a - 3b = 5 - 3 = 2$$

$$a + 3 < 3b + 5 \Rightarrow a - 3b < 5 - 3 \Rightarrow a - 3b < 2$$

Lorsqu'on a une égalité $a = b$, on peut écrire :

$$a + c = b + c \text{ quel que soit « c »},$$

$$a \times c = b \times c \text{ quel que soit « c »}.$$

Lorsqu'on a une inégalité $a < b$, on peut écrire :

$a + c < b + c$ que «c» soit positif ou négatif,

$a \times c < b \times c$ si «c» est positif,

$a \times c > b \times c$ si «c» est négatif.

Exemple :

$$3 < 4 \Rightarrow 3 + 2 < 4 + 2 \text{ (en effet } 5 < 6)$$

$$\Rightarrow 3 \times 2 < 4 \times 2 \text{ (en effet } 6 < 8)$$

$$\Rightarrow 3 \times (-2) > 4 \times (-2) \text{ (en effet } -6 > -8)$$

3. ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

3.1. Une équation à une inconnue

Le «degré» d'une équation est l'exposant le plus élevé de l'inconnue. Une équation du premier degré à une inconnue peut être mise sous la forme :

$$ax + b = 0$$

où a et b sont des nombres réels,
 x est l'inconnue.

La solution, c'est-à-dire la valeur de x vérifiant cette égalité, est obtenue de la façon suivante :

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Exemple :

$$3x + 2 = 5x - 6$$

$$\Rightarrow 3x - 5x = -6 - 2$$

$$\Rightarrow -2x = -8$$

$$\Rightarrow x = \frac{-8}{-2} = 4$$

On peut vérifier que, si dans l'équation de départ on donne à x la valeur 4, l'égalité est bien satisfaite :

$$3 \times 4 + 2 = 5 \times 4 - 6$$

$$12 + 2 = 20 - 6$$

$$14 = 14$$

3.2. Une équation à deux inconnues

Une équation du premier degré à deux inconnues se présente sous la forme :

$$ax + by + c = 0$$

(1)

où a, b, c , sont des nombres réels constants; x et y sont les inconnues.

On peut mettre cette équation sous la forme :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad (1')$$

ce qui est l'équation d'une droite, comme on le verra plus tard.

Une solution de cette équation est un couple de valeurs (x_0, y_0) satisfaisant l'égalité. Il y a une infinité de telles solutions : à chaque valeur x_0 de x , on peut faire correspondre, par la relation (1'), une valeur y_0 de y . Tout couple de telles valeurs (x_0, y_0) est solution de l'équation.

Exemple :

$$4x + 2y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 2y = -4x + 6$$

$$\Rightarrow y = -2x + 3$$

Pour $x = 0$, on obtient $y = 3$: le couple $(x = 0, y = 3)$ est solution.

Pour $x = 1$, on obtient $y = 1$: le couple $(x = 1, y = 1)$ est solution.

pour $x = 10$, on obtient $y = -17$: le couple $(x = 10, y = -17)$ est solution.

3.3. Deux équations à deux inconnues

Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues se présente sous la forme :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

où a, b, c, a', b', c' sont des nombres réels,
 x et y sont les inconnues.

Résoudre ce système consiste à rechercher les valeurs de x et y vérifiant à la fois l'équation (1) et l'équation (2).

La méthode de résolution la plus simple est la méthode par substitution : on tire de la première équation l'expression de x (ou y) en fonction de y (ou x) et on reporte cette expression dans la deuxième équation, qui devient une équation du premier degré à une inconnue, que l'on sait résoudre.

Exemple :

On veut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x - 3y + 2 = 0 & (1) \\ 3x + y + 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

On tire de la première égalité :

$$x = +3y - 2 \quad (1')$$

On reporte cette expression de x dans la deuxième égalité :

$$\begin{aligned} & 3(3y - 2) + y + 4 = 0 \\ \Rightarrow & 9y - 6 + y + 4 = 0 \\ \Rightarrow & 10y - 2 = 0 \\ \Rightarrow & 10y = 2 \\ \Rightarrow & y = \frac{2}{10} = 0,2 \end{aligned}$$

On obtient x par la relation (1') :

$$\begin{aligned} x &= +3y - 2 \\ &= +3 \times (0,2) - 2 \\ &= 0,6 - 2 \\ &= -1,4 \end{aligned}$$

La solution du système est : $x = -1,4$ et $y = 0,2$

Remarque : Dans le cas général, un système de deux équations du premier degré à deux inconnues possède une seule solution : $x = \dots$ et $y = \dots$. Dans certains cas particuliers, il y a zéro solution ou une infinité de solutions, ce qui peut être interprété géométriquement comme on le verra au paragraphe 5 (chacune des équations du premier degré à deux inconnues est représentée par une droite et les deux droites ainsi obtenues sont soit sécantes, soit parallèles, soit confondues).

Exemple 1 : Résoudre :

$$\begin{cases} x + 3y = 7 & (1) \\ 2x + 6y = 10 & (2) \end{cases}$$

On tire de la première équation : $x = 7 - 3y$

On reporte cette expression dans la deuxième équation :

$$\begin{aligned} 2(7 - 3y) + 6y &= 10 \\ 14 - 6y + 6y &= 10 \\ 14 &= 10 \quad \text{ce qui est impossible.} \end{aligned}$$

Il n'y a pas de solution, c'est-à-dire qu'aucune valeur de x et de y ne vérifie à la fois la relation (1) et la relation (2).

Exemple 2 : Résoudre :

$$\begin{cases} x + 3y = 7 & (1) \\ 2x + 6y = 14 & (2) \end{cases}$$

On tire de la première équation : $x = 7 - 3y$

On reporte cette expression dans la deuxième équation :

$$\begin{aligned} 2(7 - 3y) + 6y &= 14 \\ 14 - 6y + 6y &= 14 \\ 14 &= 14 \quad \text{ce qui est toujours vrai} \end{aligned}$$

Les deux équations se ramènent à une seule. Il y a une infinité de solutions : à toute valeur de y correspond une valeur de x solution, par la relation : $x = 7 - 3y$. Ainsi sont solutions, par exemple, les couples de valeurs :

$$\begin{aligned} y = 1 & \quad \text{et} \quad x = 7 - 3 \times 1 = 4 \\ y = 0 & \quad \text{et} \quad x = 7 - 3 \times 0 = 7 \end{aligned}$$

$$y = 2,5 \quad \text{et} \quad x = 7 - 3 \times 2,5 = -0,5$$

$$y = 10 \quad \text{et} \quad x = 7 - 3 \times 10 = -23$$

On peut remarquer que, si dans l'équation (2) on divise tous les termes par 2, on obtient l'équation (1). Les deux équations se ramènent donc à une seule. C'est pourquoi il y a une infinité de solutions.

3.4. "n" équations à "n" inconnues

Un système de n équations du premier degré à n inconnues se présente sous la forme :

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = a_{1,0} \quad (1)$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = a_{2,0} \quad (2)$$

...

$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = a_{n,0} \quad (n)$$

Où $a_{1,1} \dots a_{n,n}$ $a_{1,0} \dots a_{n,0}$ sont des nombres réels

$x_1 \dots x_n$ sont les n inconnues.

Dans le cas général, un tel système a une solution et une seule: $x_1 = \dots, x_2 = \dots, x_n = \dots$ Si on donne à x_1, \dots, x_n , les valeurs de cette solution, les n égalités sont vérifiées. Dans les cas particuliers, le système peut n'avoir aucune solution (aucun ensemble de valeurs $x_1 = \dots, x_n = \dots$ ne vérifie les n égalités), ou il peut avoir une infinité de solutions.

Pour résoudre ce système, on procède soit manuellement par substitution (on tire l'expression de x_1 de la première équation et on la reporte dans les autres équations, puis on tire l'expression de x_2 de la deuxième équation), soit par ordinateur à l'aide du calcul matriciel.

Exemple:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 11 & (1) \\ -x + y + z = 4 & (2) \\ x - 2y - z = -7 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 11 & (1) \\ -x + y + z = 4 & (2) \\ x - 2y - z = -7 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 11 & (1) \\ -x + y + z = 4 & (2) \\ x - 2y - z = -7 & (3) \end{cases}$$

On tire de la relation (1):

$$y = 11 - 2x - 3z \quad (1')$$

On reporte cette expression dans les relations (2) et (3):

$$-x + (11 - 2x - 3z) + z = 4 \quad (2')$$

$$x - 2(11 - 2x - 3z) - z = -7 \quad (3')$$

soit

$$-3x - 2z + 7 = 0 \quad (2'')$$

$$5x + 5z - 15 = 0 \quad (3'')$$

On tire de la relation (2''):

$$x = -\frac{2}{3}z + \frac{7}{3} \quad (2''')$$

Chapitre 1 : Rappels de mathématiques

On reporte cette expression dans la relation (3'')

$$5\left(-\frac{2}{3}z + \frac{7}{3}\right) + 5z - 15 = 0$$

$$-\frac{10}{3}z + \frac{35}{3} + 5z - 15 = 0$$

$$-10z + 35 + 15z - 45 = 0$$

$$5z - 10 = 0$$

$$z = 2$$

(on a tout multiplié par 3)

d'où d'après (2''') :

$$x = -\frac{2}{3}z + \frac{7}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{7}{3} = +1$$

et d'après (1') :

$$y = 11 - 2x - 3z$$

$$= 11 - 2 - 6$$

$$= 3$$

La solution du système est : $x = 1$, $y = 3$, $z = 2$

4. ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Une équation du second degré se présente sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où a, b, c , sont des nombres réels ($a \neq 0$),
 x est l'inconnue.

On recherche les valeurs de x telles que cette égalité soit satisfaite. Ces valeurs sont appelées « solutions » ou « racines » de l'équation du second degré.

Pour obtenir ces solutions, on calcule le discriminant Δ de l'équation, qui a pour expression :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

si $\Delta < 0$: l'équation n'a pas de solution. Il n'existe aucune valeur de x telle que : $ax^2 + bx + c = 0$

si $\Delta = 0$: l'équation a une seule solution qui est : $x = -\frac{b}{2a}$

si $\Delta > 0$: l'équation a deux solutions qui sont :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

La somme de ces deux solutions est égale à : $-b/a$

Le produit de ces deux solutions est égal à : c/a

Exemple 1: Résoudre: $2x^2 + 7x - 15 = 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 2 \times (-15) \\ &= 49 + 4 \times 2 \times 15 \\ &= 169\end{aligned}$$

Il y a deux solutions car Δ est positif:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 + \sqrt{169}}{2 \times 2} = \frac{-7 + 13}{4} = 1,5 \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 - \sqrt{169}}{2 \times 2} = \frac{-7 - 13}{4} = -5\end{aligned}$$

On peut vérifier que si on reporte $x = 1,5$ ou $x = -5$ dans l'équation $2x^2 + 7x - 15 = 0$, l'égalité est bien vérifiée.

Exemple 2: Résoudre: $2x^2 + 7x + 15 = 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 2 \times 15 \\ &= 49 - 120 \\ &= -71\end{aligned}$$

Il n'y a pas de solution car Δ est négatif. Il n'existe aucune valeur de x telle que $2x^2 + 7x + 15 = 0$

5. FONCTIONS

5.1. Définitions

Une fonction $y = f(x)$ est une relation qui fait correspondre à chaque nombre réel x un nombre réel y .

Exemples: $y = 3x$, $y = x^2 + 5$, $y = 1 + \sqrt{x}$, $y = \sin x$

Une fonction est croissante si y augmente lorsque x augmente.

Une fonction est décroissante si y diminue lorsque x augmente.

On peut représenter graphiquement une fonction. Pour cela, on choisit deux axes de coordonnées Ox (axes des abscisses) et Oy (axe des ordonnées) généralement perpendiculaires et une unité de mesure sur chacun d'eux (• figure 1).

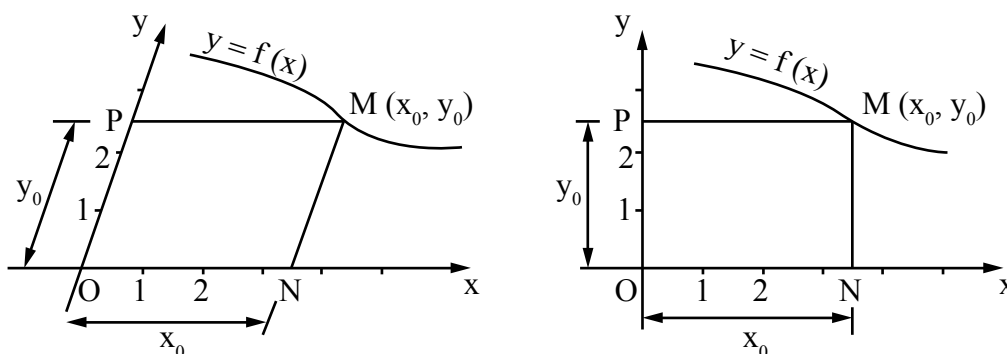


Figure 1: Représentation d'une fonction

Chapitre 1 : Rappels de mathématiques

Un couple de valeurs (x_0, y_0) est représenté par un point M dans le plan défini par les axes Ox et Oy . Ce point M est le quatrième sommet du parallélogramme ayant pour autres sommets :

- le point O , origine des axes,
- le point N sur l'axe, tel que la longueur ON soit égale à x_0
- le point P sur l'axe Oy , tel que la longueur OP soit égale à y_0

Si les axes Ox et Oy sont perpendiculaires, ce qui est le cas habituel, ce parallélogramme est un rectangle.

On dit que le point M a pour coordonnées x_0 et y_0 , ce qui s'écrit symboliquement $M(x_0, y_0)$.

À chaque valeur x on peut faire correspondre une valeur y , calculée par $y = f(x)$. Lorsque x varie, le point $M(x, y)$ décrit une courbe dans le plan Ox, Oy . Cette courbe est la représentation graphique de la fonction $y = f(x)$

5.2. Fonction du premier degré

Une fonction du premier degré, ou fonction linéaire, est de la forme :

$y = ax + b$ où a et b sont des nombres réels constants.

Si a est positif la fonction est croissante. Si a est négatif la fonction est décroissante. Si a est nul la fonction est constante.

La courbe représentative de la fonction est une droite. Le coefficient a est appelé coefficient directeur. Il est égal à la tangente de l'angle que fait la droite avec l'axe Ox .

Exemple 1 :

Tracer la courbe d'équation : $y = 2x + 4$.

C'est l'équation d'une droite.

Pour $x = 0$, on obtient $y = 4$, aussi la droite passe par le point $A(0, 4)$.

Pour $y = 0$, on obtient $x = -2$, aussi la droite passe par le point $B(-2, 0)$.

Connaissant ces deux points A et B , on peut tracer la droite (• figure 2).

Le coefficient directeur de la droite est égal à 2, donc $\text{tg } \alpha = 2$.

La droite d'équation $y = 2x$ est parallèle à la droite d'équation $y = 2x + 4$, car ces deux droites ont même coefficient directeur.

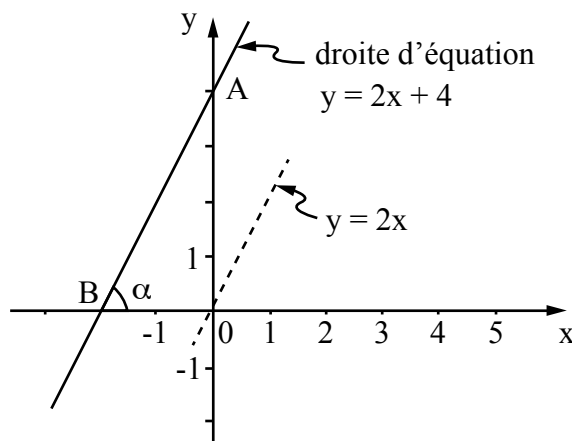


Figure 2 : Tracé d'une droite

Exemple 2:

Trouver l'équation de la droite passant par les points $A(2, 1)$ et $B(-2, 3)$ (• figure 3).

Cette équation est de la forme $y = ax + b$.

Pour $x = 2$, on doit avoir $y = 1$, donc $1 = 2a + b$

Pour $x = -2$, on doit avoir $y = 3$, donc $3 = -2a + b$

On est ramené à résoudre un système de deux équations à deux inconnues, les inconnues étant a et b

$$2a + b = 1 \quad (1)$$

$$-2a + b = 3 \quad (2)$$

De la première équation on tire: $b = 1 - 2a$ (1')

expression que l'on reporte dans la deuxième équation:

$$-2a + (1 - 2a) = 3 \quad (2')$$

$$\Rightarrow -4a = 2$$

$$\Rightarrow a = -1/2$$

Et d'après (1')

$$b = 1 - 2a = 1 - 2(-1/2) = 2$$

L'équation de la droite passant par les points $A(2, 1)$ et $B(-2, 3)$ est:

$$y = -x/2 + 2$$

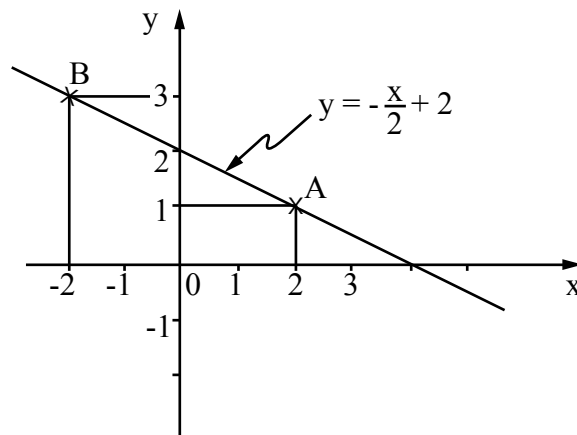


Figure 3: Équation d'une droite

5.3. Fonction du second degré

Une fonction du second degré est de la forme:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{où } a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels constants.}$$

La courbe représentative de cette fonction est une parabole, d'axe parallèle à Oy.

Quand a est positif, la concavité de la courbe est orientée vers le haut (• figure 4):

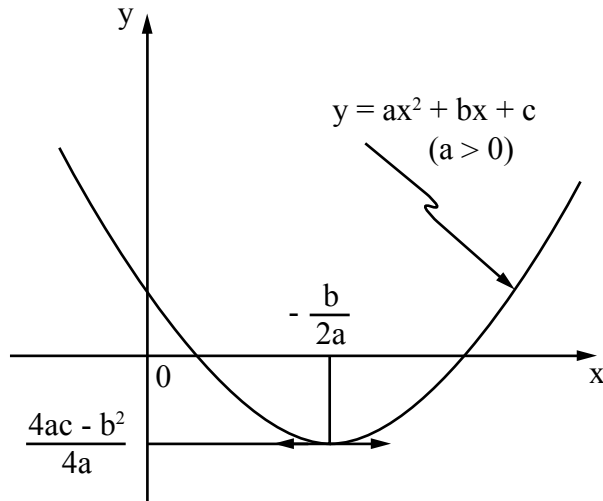
- la fonction est décroissante lorsque $-\infty < x < -b/2a$,
- la fonction est croissante lorsque $-b/2a < x < +\infty$,
- la fonction présente un minimum pour $x = -b/2a$. En ce minimum, la tangente à la courbe est horizontale.

Chapitre 1: Rappels de mathématiques

Pour $x = -b/2a$, on obtient :

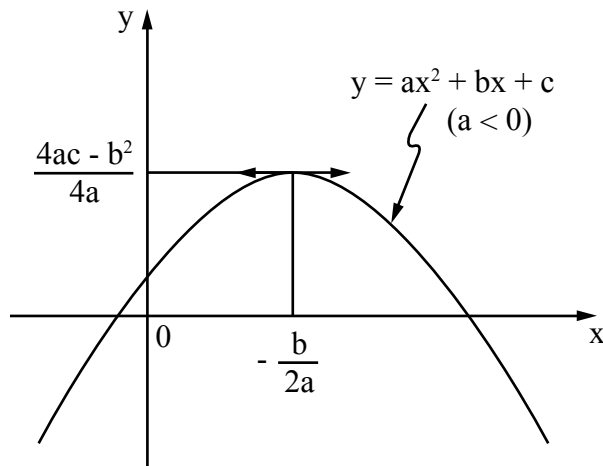
$$y = a(-b/2a)^2 + b(-b/2a) + c$$

$$= \frac{4ac - b^2}{4a}$$



CAS OÙ $a > 0$

Figure 4: Parabole avec $a > 0$



CAS OÙ $a < 0$

Figure 5: Parabole avec $a < 0$

Quand a est négatif, la concavité de la courbe est orientée vers le bas (• figure 5) :

- la fonction est croissante lorsque $-\infty < x < -b/2a$,
- la fonction est décroissante lorsque $-b/2a < x < +\infty$,
- la fonction présente un maximum pour $x = -b/2a$. En ce maximum, la tangente à la courbe est horizontale.

On peut rechercher les points où la parabole coupe l'axe Ox . Ces points sont tels que $y = 0$, donc les valeurs correspondantes de x sont solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$: il n'y a pas de solution, donc la parabole ne coupe pas l'axe Ox .

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$: il y a une solution $x = -b/2a$, qui correspond au point où la tangente à la parabole est parallèle à l'axe Ox .

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$: il y a deux solutions donc la parabole coupe l'axe Ox en deux points:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemple: Étudier la fonction $y = x^2 + 2x - 3$.

C'est une parabole d'axe parallèle à Oy . On est dans le cas où $a > 0$ ($a = 1$) et on a:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$$

La fonction est décroissante lorsque $-\infty < x < -1$.

La fonction est croissante lorsque $-1 < x < +\infty$.

La fonction présente un minimum pour $x = -1$ et prend alors pour valeur:

$$y = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4$$

Le discriminant de l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$ est égal à:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

Il est positif, donc la parabole coupe l'axe Ox en 2 points, d'abscisses:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3$$

Par ailleurs, on peut calculer quelques points situés sur la courbe $y = x^2 + 2x - 3$.

pour	$x = 0$:	$y = -3$
	$x = 2$:	$y = 5$
	$x = -2$:	$y = -3$
	$x = -4$:	$y = -5$
	$x = 0,5$:	$y = -1,75$
	:

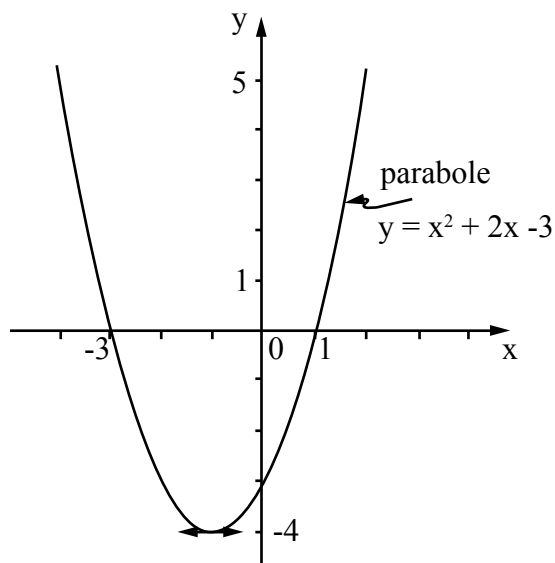


Figure 6 : Parabole

5.4. Autres fonctions à une variable

Le nombre de fonctions possibles, de la forme $y = f(x)$, est illimité.

On rencontre des fonctions **polynômes**, de la forme :

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots + sx^n$$

où a, b, c, d, \dots, s sont des nombres réels constants ;

n est un nombre entier constant.

Le degré du polynôme est l'exposant le plus élevé de x , soit donc n .

Exemple :

$$y = 2x^3 + 3x^2 + 4 \quad \text{est un polynôme de degré 3 en } x$$

On rencontre des fonctions **rationnelles** de la forme :

$$y = \frac{a + bx + cx^2 + \dots + sx^n}{a' + b'x + c'x^2 + \dots + rx^m}$$

qui sont le quotient de deux polynômes.

Exemple :

$$y = \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x - 1}$$

On peut tracer point par point les courbes représentatives de ces fonctions : on donne diverses valeurs à x ($x = 0, x = 1, x = 10, \dots$) et on calcule les valeurs correspondantes de y . On obtient ainsi un certain nombre de points situés sur la courbe, points de coordonnées (x_0, y_0) avec $y_0 = f(x_0)$. Lorsqu'on a placé ainsi suffisamment de points, on trace la courbe passant par ces points.

Nous allons donner ici les équations de deux fonctions particulières : **le cercle** et **l'ellipse**.

Le cercle (figure 7) :

Lorsqu'on choisit l'origine des axes $x'x$ et $y'y$ au centre d'un cercle de rayon R , l'équation de celui-ci est la suivante :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$\text{soit } y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\text{avec } -R \leq x \leq +R$$

Par définition, « la tangente » à un cercle au point M est la droite passant par M et perpendiculaire au rayon OM .

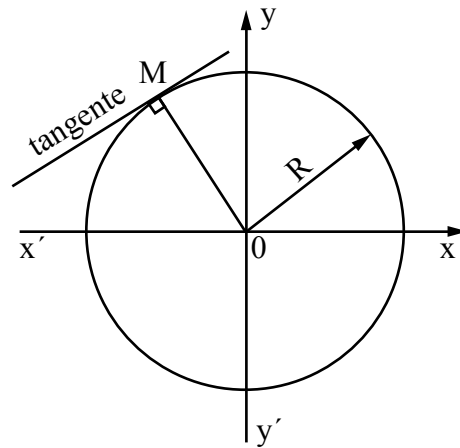


Figure 7: Cercle

L'ellipse (figure 8):

Lorsqu'on choisit l'origine des axes $x'x$ et $y'y$ au centre de symétrie d'une ellipse, l'équation de celle-ci est la suivante :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Tout point M de coordonnées (x_0, y_0) vérifiant cette relation est situé sur l'ellipse.

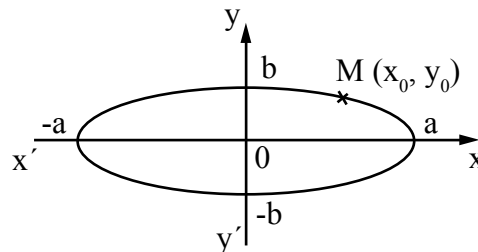


Figure 8: Ellipse

5.5. Fonctions à plusieurs variables

Elles se présentent sous la forme :

$$z = f(u, v, \dots, x, y) \quad \text{où } u, v, \dots, x, y \text{ sont les variables.}$$

Lorsqu'on fixe une valeur à chacune de ces variables, on obtient une valeur pour la fonction z.

Exemple :

$$z = x^2 + xy + 3 \quad (\text{fonction à 2 variables } x \text{ et } y)$$

$$\text{Pour: } x = 0 \text{ et } y = 0 : z = 3$$

$$x = 1 \text{ et } y = 0 : z = 4$$

$$x = 1 \text{ et } y = 2 : z = 6$$

Chapitre 1 : Rappels de mathématiques

Il n'est pas possible de représenter graphiquement cette fonction par une courbe située dans un plan.

Cas particulier : Fonctions à deux variables x et y . Elles sont de la forme $z = f(x, y)$.

On peut représenter ces fonctions dans un système d'axes Ox, Oy, Oz : on choisit par exemple les axes Ox et Oy perpendiculaires entre eux et situés dans un plan horizontal et l'axe Oz vertical (• *figure 9*).

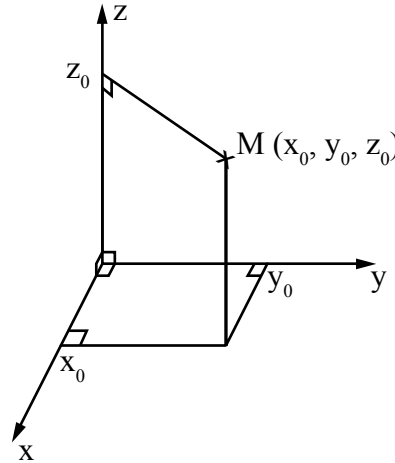


Figure 9 : Système d'axes Ox, Oy, Oz

Dans ce système d'axes, l'ensemble des points M de coordonnées (x_0, y_0, z_0) telles que $z_0 = f(x_0, y_0)$ est situé sur une surface. Ainsi l'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) telles que :

$$z = 2x + 3y + 4$$

est situé dans un plan.

Plus généralement, l'équation d'un plan dans un système d'axes Ox, Oy, Oz est de la forme :

$$z = ax + by + c$$

où a, b et c sont des nombres constants.

Les points situés sur une droite, dans un système d'axes Ox, Oy, Oz , ont des coordonnées x, y, z vérifiant les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} z = ax + by + c \\ z = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b', c' sont des nombres constants.

Chacune de ces relations est l'équation d'un plan. Les points situés sur la droite à l'intersection de ces deux plans font partie des deux plans et leurs coordonnées (x, y, z) vérifient donc les équations de chacun des plans.

Enfin, les points M de coordonnées x, y, z telles que (• *figure 10*) :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

sont situés sur une sphère, de rayon R , dont le centre est confondu avec l'origine O des axes.

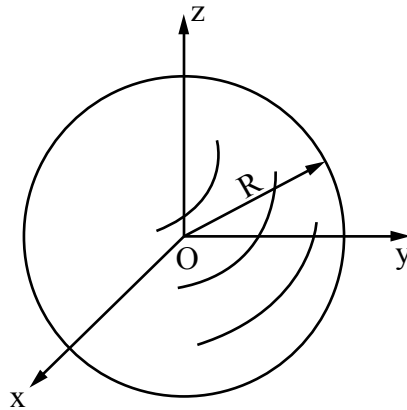


Figure 10: Sphère

6. SYSTÈMES D'INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

On rencontre des inéquations lorsqu'on effectue du calcul de structures: vérifier que certaines charges ou certains efforts ne dépassent pas la capacité de résistance d'un élément de structure (barre, assemblage) revient à vérifier qu'une ou plusieurs inéquations (ou inégalités) sont respectées.

Nous n'allons étudier ici que les inéquations du premier degré, mais il existe bien sûr d'autres formes d'inéquations, tout comme il existe des formes d'équations autres que celles du premier degré.

6.1. Une inéquation à une inconnue

Une inéquation du premier degré à une inconnue se présente sous la forme:

$$ax + b < 0$$

On en tire facilement une limite pour x .

Exemple:

$$\begin{aligned} x+4 &< 3x-2 \\ \Rightarrow x-3x &< -2-4 \\ \Rightarrow -2x &< -6 \\ \Rightarrow 2x &> 6 && \text{(on a multiplié par -1, aussi on a changé le symbole < en >)} \\ \Rightarrow x &> 6/2 \\ \Rightarrow x &> 3 \end{aligned}$$

Toutes les valeurs de x telles que $x > 3$ respectent l'inégalité de départ.

Par exemple pour $x = 4$:

$$\begin{aligned} x+4 &< 3x-2 \\ 4+4 &< 12-2 \\ 8 &< 10 \end{aligned}$$

ce qui est effectivement vrai, donc $x = 4$ respecte l'inégalité de départ.

6.2. Une inéquation à deux inconnues

Une inéquation du premier degré à deux inconnues se présente sous la forme :

$$ax + by + c < 0 \quad (1)$$

où a, b, c sont des nombres réels constants,
 x et y sont les inconnues.

Les solutions de l'équation :

$$ax + by + c = 0$$

sont les coordonnées (x, y) de tous les points situés sur la droite :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad \text{comme nous l'avons vu en 3.2. et 5.2.}$$

Les coordonnées (x, y) de tous les points situés d'un côté de cette droite sont telles que $ax + by + c < 0$ et sont donc solutions de l'inéquation (1).

Les coordonnées (x, y) de tous les points situés de l'autre côté de cette droite sont telles que $ax + by + c > 0$.

Pour connaître le côté de la droite qui convient, il suffit de chercher si un point particulier, par exemple l'origine O des axes (de coordonnées $x = 0$ et $y = 0$), convient.

Exemple: Rechercher les solutions de l'inéquation: $2x - y + 4 > 0$.

On trace la droite d'équation $y = 2x + 4$, comme nous l'avons fait en 5.2.

Les coordonnées de tous les points situés sur cette droite sont telles que $2x - y + 4 = 0$.

Les coordonnées $(x = 0, y = 0)$ de l'origine O satisfont à l'inéquation, en effet :

$$2 \times 0 - 0 + 4 = 4 > 0$$

Donc les coordonnées (x, y) de tous les points situés du même côté que O par rapport à la droite satisfont à l'inégalité. Les points situés à gauche de cette droite ne conviennent pas (• figure 11).

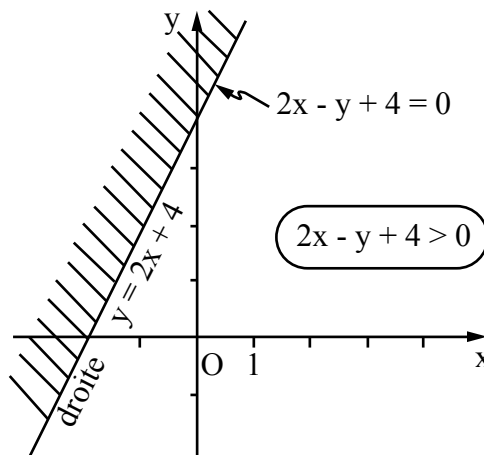


Figure 11 : Demi-plan admissible

6.3. "n" inéquations à deux inconnues

On procède comme indiqué en 6.2. pour chacune des inéquations: pour chaque inéquation, on trace la droite correspondante, et on hachure la partie de plan, située d'un côté de cette droite, qui ne convient pas.

Lorsqu'on a traité l'ensemble des inéquations, les coordonnées de tous les points situés dans la partie de plan non hachurée satisfont au système d'inéquations. Parfois, il ne subsiste aucune zone non hachurée. Dans ce cas, il n'existe aucune solution au système d'inéquations. Aucun couple de valeurs (x, y) ne satisfait à l'ensemble des inéquations.

Exemple:

Rechercher les solutions du système:

$$2x - y + 4 > 0 \quad (1)$$

$$y < 2 \quad (2)$$

$$x - 2y + 1 < 0 \quad (3)$$

On trace les droites d'équations:

$$y = 2x + 4 \quad (1')$$

$$y = 2 \quad (2')$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \quad (3')$$

Le point O :

- est du bon côté par rapport à la droite $y = 2x + 4$ ($2 \times 0 + 4 = 4 > 0$).

On hachure donc la zone située à gauche de cette droite;

- est du bon côté par rapport à la droite $y = 2$ ($0 < 2$).

On hachure donc la zone située au-dessus de cette droite,

- est du mauvais côté par rapport à la droite:

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \quad \left(\frac{0}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0 \right)$$

On hachure la zone située en dessous de cette droite.

Les coordonnées des points situés dans la zone non hachurée respectent les 3 inéquations de départ (• figure 12). Ainsi le point P , de coordonnées $x = -1$ et $y = +1$ est situé dans cette zone non hachurée. Le couple $(x = -1, y = +1)$ est l'une des solutions du système d'inéquations, comme on peut le vérifier:

$$2(-1) - 1 + 4 = 1 > 0 \quad \text{satisfait}$$

$$1 < 2 \quad \text{satisfait}$$

$$-1 - 2(1) + 1 = -2 < 0 \quad \text{satisfait}$$

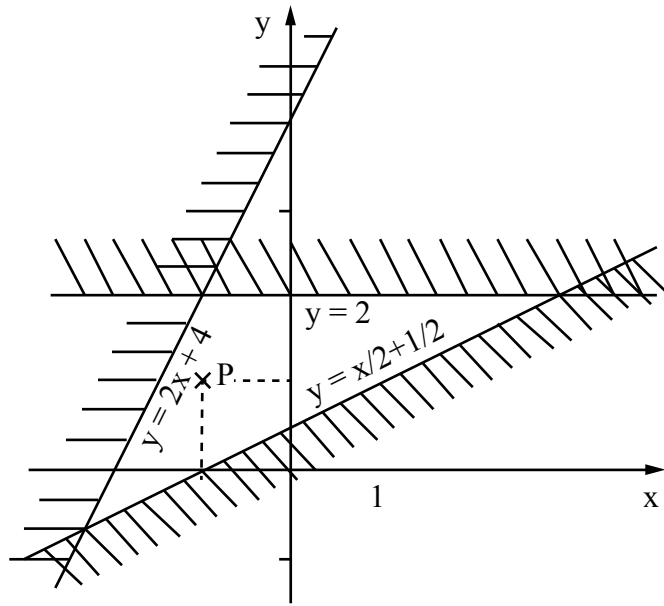


Figure 12 : Domaine admissible non hachuré

7. TRIGONOMÉTRIE

7.1. Le cercle trigonométrique

On considère le cercle de centre O et de rayon égal à 1, qu'on appelle cercle trigonométrique (• figure 13). On considère un point M situé sur ce cercle, et qui le parcourt dans le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre. Ce sens est appelé sens trigonométrique.

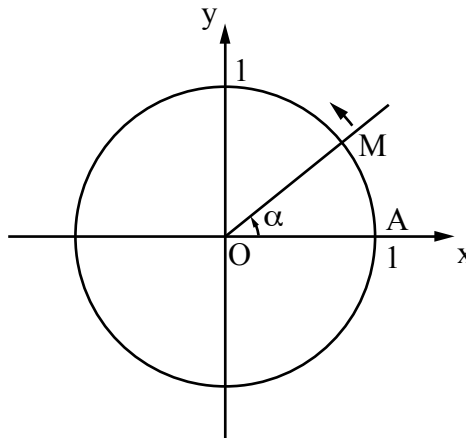


Figure 13 : Cercle trigonométrique

L'angle α que font entre elles les droites Ox et OM peut être mesuré par la longueur de l'arc AM . L'unité d'angle est alors le radian. Lorsque le point M effectue un tour complet du cercle, en partant du point A pour aboutir au point A , l'angle correspondant est égal à la circonférence de ce cercle de rayon 1, soit donc :

$$2\pi \times 1 = 2\pi \quad \text{radians}$$

avec $\pi = 3,1416$

Les angles peuvent aussi être mesurés en degrés. Un angle droit fait $\pi/2$ radians ou 90° .

On a donc les correspondances suivantes entre radian et degré :

$$\frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ \text{ (angle droit)}$$

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ \text{ (angle plat)}$$

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \text{ (tour complet)}$$

Un angle de α° vaut donc : $\left\{ \frac{\alpha^\circ \times \pi}{180} \right\}$ radians

Un angle de r radians vaut donc : $\frac{r \times 180}{\pi}$ degrés

7.2. Les fonctions trigonométriques

On trace le cercle trigonométrique. Soit α l'angle formé par les droites Ox et OM . Les projections orthogonales du point M sur les axes Ox et Oy sont notées P et Q (• *figure 14*).

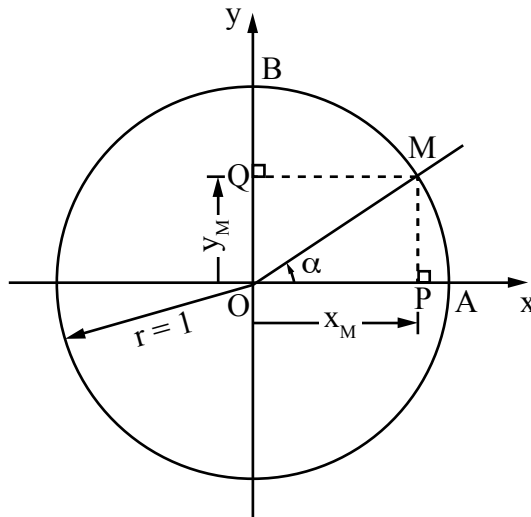


Figure 14 : Cercle trigonométrique

Lorsque l'angle α varie, le point M se déplace sur le cercle trigonométrique et les points P et Q se déplacent sur les axes Ox et Oy .

Les coordonnées du point M sont :

$$x_M = \overline{OP}$$

$$y_M = \overline{OQ}$$

(\overline{OP} est la longueur du segment OP , affectée du signe + ou - suivant que P est à droite ou à gauche de O).

Par définition, on appelle **cosinus** de l'angle α la valeur de x_M , abscisse du point M .

On appelle **sinus** de l'angle α la valeur de y_M , ordonnée du point M .

Les abréviations sont : $x_M = \cos \alpha$

$$y_M = \sin \alpha$$

On considère encore le cercle trigonométrique, et les axes Ay' parallèle à Oy et Bx' parallèle à Ox . La droite OM , qui fait un angle α avec l'axe Ox , coupe ces axes respectivement en R et S (• *figure 15*).

Chapitre 1 : Rappels de mathématiques

Par définition, on appelle **tangente** de l'angle α la longueur algébrique (c'est-à-dire affectée du signe + ou -) de \overline{AR} .

On appelle **cotangente** de l'angle α la longueur algébrique de \overline{BS} .

Les abréviations sont: $\text{tg } \alpha$ et $\text{cotg } \alpha$

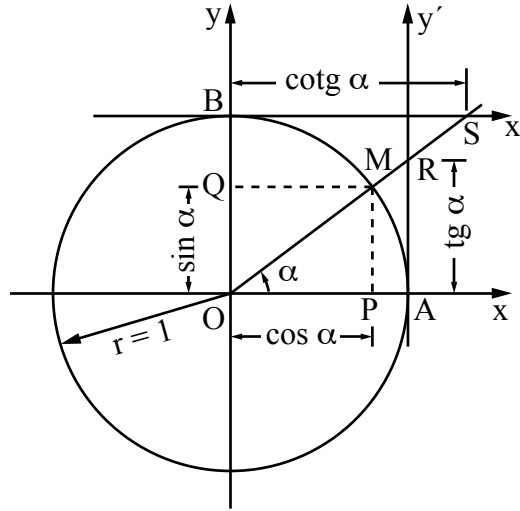


Figure 15: Fonctions trigonométrique

7.3. Représentations graphiques

Toutes les fonctions trigonométriques ($\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\text{tg } \alpha$, $\text{cotg } \alpha$) sont périodiques et de période 2π radians (ou 360°). En effet, lorsqu'on augmente l'angle α de 2π , les fonctions retrouvent la même valeur (le point M a fait un tour complet sur le cercle trigonométrique):

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + 2\pi) &= \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 2\pi) &= \cos \alpha \\ \text{tg}(\alpha + 2\pi) &= \text{tg } \alpha \\ \text{cotg}(\alpha + 2\pi) &= \text{cotg } \alpha \end{aligned}$$

Les courbes représentatives de ces fonctions sont données ci-après (• figures 16 à 19):

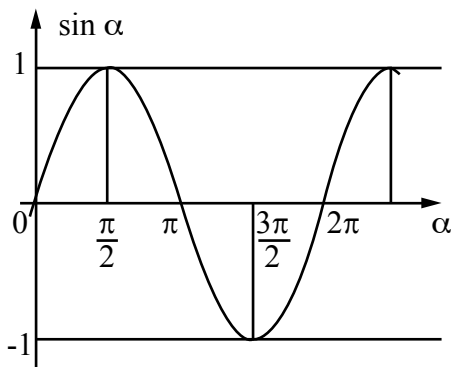


Figure 16: Fonction sinus

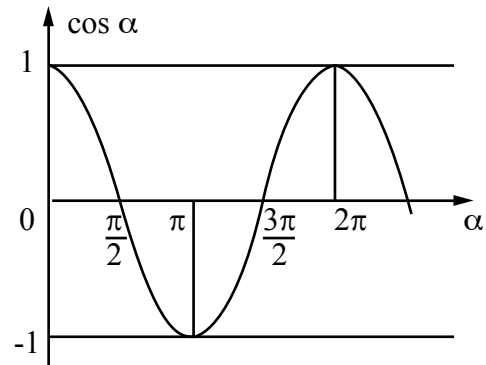


Figure 17: Fonction cosinus

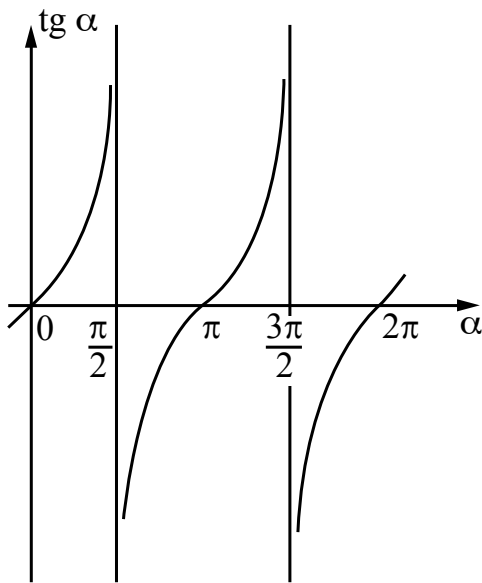


Figure 18: Fonction tangente

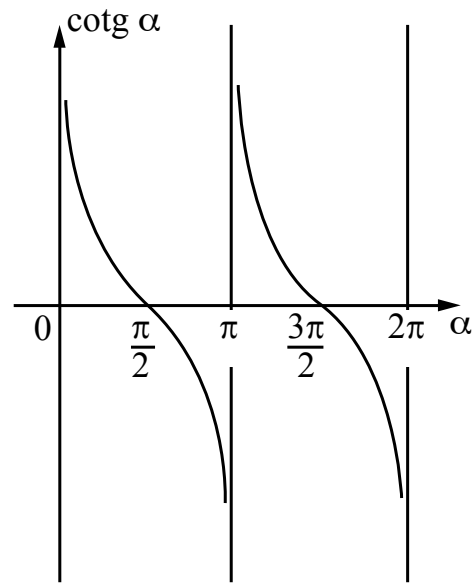


Figure 19: Fonction cotangente

7.4. Relations entre les fonctions trigonométriques

En examinant les définitions de ces fonctions sur le cercle trigonométrique et en considérant les propriétés de triangles semblables, on montre que :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Par ailleurs, on démontre les propriétés suivantes, qu'il est utile de retenir :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

7.5. Relations et valeurs particulières

a) En examinant les définitions des fonctions sur le cercle trigonométrique, on constate facilement que :

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$$

b) $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ varient entre - 1 et + 1

$\operatorname{tg} \alpha$ et $\operatorname{cotg} \alpha$ varient entre $-\infty$ et $+\infty$

c) Les fonctions prennent les valeurs particulières suivantes :

$$\sin 0^\circ = 0$$

$$\cos 0^\circ = 1$$

$$\operatorname{tg} 0^\circ = 0$$

$$\sin 30^\circ = 1/2$$

$$\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3}/3$$

$$\sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$$

$$\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\cos 60^\circ = 1/2$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\cos 90^\circ = 0$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \infty$$

$$\sin 180^\circ = 0$$

$$\cos 180^\circ = -1$$

$$\operatorname{tg} 180^\circ = 0$$

d) Il est également utile de retenir les propriétés suivantes relatives aux longueurs des côtés dans un triangle rectangle (• *figure 20*):

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos \alpha = \frac{AB}{AC}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AB}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

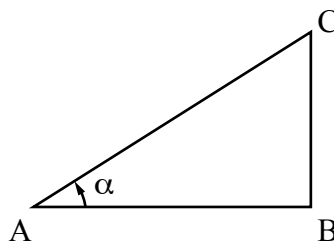


Figure 20 : Triangle rectangle

e) La longueur du segment AC (• *figure 21*), reliant le point A de coordonnées (x_1, y_1) au point C de coordonnées (x_2, y_2) peut être déduite facilement de la relation précédente.

On obtient :

$$\text{longueur AC} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

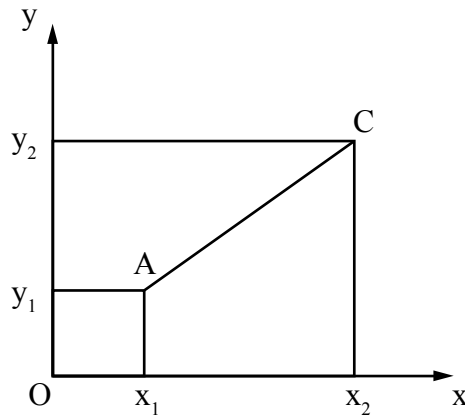


Figure 21: Segment de droite

f) La longueur de la projection orthogonale d'un segment de droite sur un axe est égale au produit de la longueur de ce segment par le cosinus de l'angle que fait le segment avec l'axe (• figure 22) :

$$A'B' = AB \cos \alpha$$

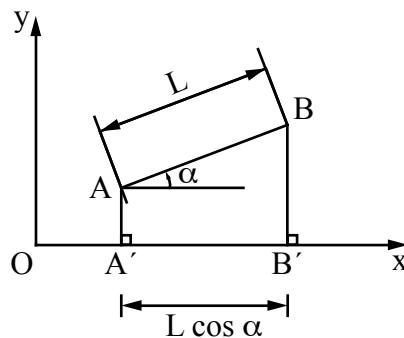


Figure 22: Segment de droite

g) Pour des valeurs faibles des angles (angles inférieurs à 10°), on peut considérer que le sinus de l'angle ainsi que la tangente de l'angle sont égaux à la valeur de l'angle en radians.

$$\text{si } \alpha < 10^\circ : \quad \sin \alpha \approx \text{tg } \alpha \approx \alpha \text{ en radians}$$

Exemple :

$$\alpha = 5^\circ = 5 \times \frac{\pi}{180} = 0,08727 \text{ rad.}$$

$$\sin 5^\circ \approx \text{tg } 5^\circ \approx 0,08727$$

$$(\text{valeurs exactes : } \sin 5^\circ = 0,08716; \text{ tg } 5^\circ = 0,08749)$$

h) Par définition, la pente d'une droite est égale à la tangente de l'angle que fait cette droite avec l'axe x'x ou avec l'horizontale.

$$\text{Pente } 15 \% \Rightarrow \text{tg } \alpha = 0,15 \quad (\bullet \text{ figure 23})$$

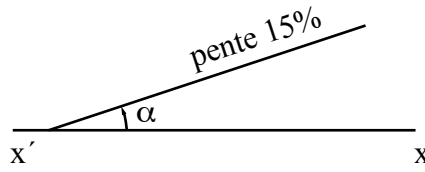


Figure 23. Pente d'une droite

8. AIRES ET VOLUMES

8.1. Définitions et méthodes de calcul

L'aire d'un rectangle de côté a et b est égale à $a \times b$.

Pour obtenir l'aire approchée d'une surface plane délimitée par une courbe complexe, on peut découper cette surface en petits rectangles ou carrés (éventuellement en triangles) et faire la somme des aires de tous ces petits rectangles ou carrés contenus dans la surface (• figure 24).

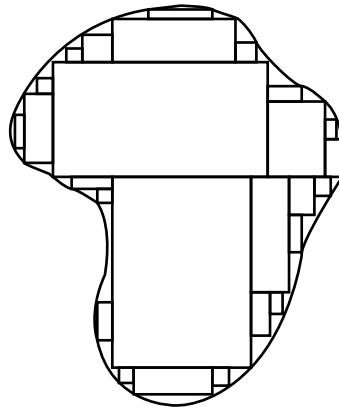
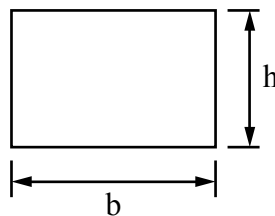


Figure 24: Détermination approchée de l'aire

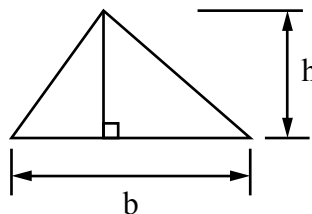
8.2. Valeurs particulières d'aires

Rectangle



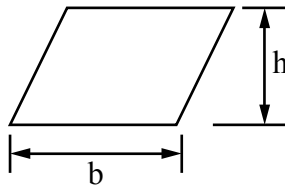
$$A = b \times h$$

Triangle



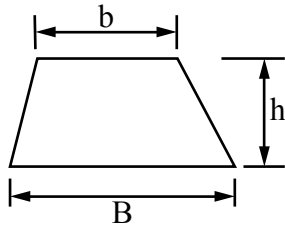
$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Parallélogramme



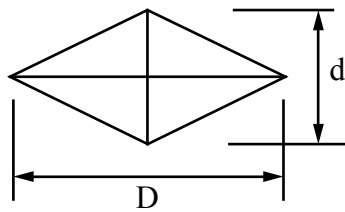
$$A = b \times h$$

Trapèze



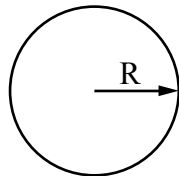
$$A = \frac{B+b}{2} \times h$$

Lozange



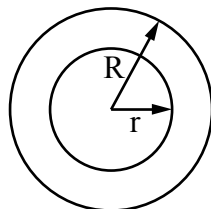
$$A = \frac{D \times d}{2}$$

Cercle



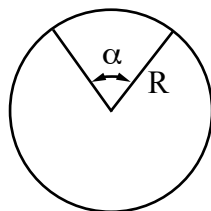
$$A = \pi R^2$$

Couronne



$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

Secteur



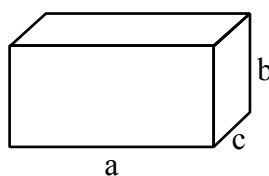
$$A = \pi R^2 \times \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

Aire de surface délimitant une sphère de rayon R

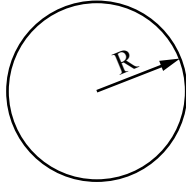
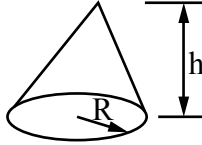
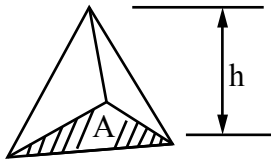
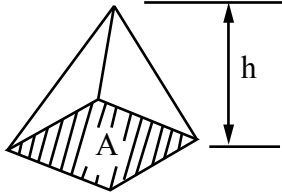
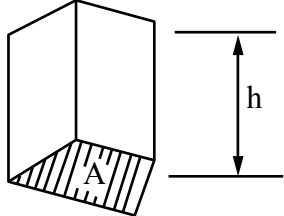
$$A = 4\pi R^2$$

8.3. Valeurs particulières de volumes

Parallélépipède



$$V = a \times b \times c$$

Sphère		$V = \frac{4}{3} \pi R^3$
Cône droit ou oblique		$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \times h$
Tétraèdre		$V = \frac{1}{3} \times A \times h$ <p>(A = aire de la base).</p>
Pyramide		$V = \frac{1}{3} \times A \times h$ <p>(A = aire de la base).</p>
Prisme droit ou oblique		$V = A \times h$ <p>(A = aire de la base).</p>

9. NOTION DE VECTEUR

Les vecteurs sont utilisés dans beaucoup de domaines de l'ingénieur, en particulier en calcul de structures pour représenter des forces : ainsi la détermination de la résultante de plusieurs forces se ramène à une somme de vecteurs telle que définie en 9.2.

9.1. Définitions

Un vecteur \overrightarrow{AB} est un segment de droite AB dont on indique le sens, de A vers B : A est l'origine et B l'extrémité du vecteur \overrightarrow{AB} (• figure 25).

Un vecteur est défini par :

- sa longueur appelée aussi « norme » (la distance entre A et B),
- sa direction (la droite qui porte ce vecteur),
- son sens (de A vers B).

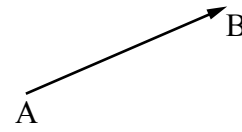


Figure 25: Vecteur

Deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont équipollents s'ils ont (• figure 26):

- même longueur,
- des directions parallèles,
- même sens.

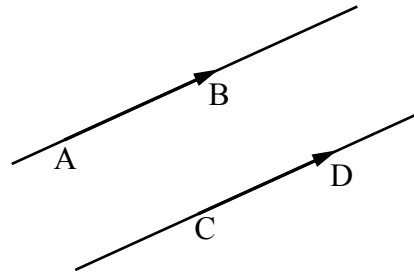


Figure 26: Vecteurs équipollents

Deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont opposés s'ils ont (• figure 27):

- même longueur,
- des directions parallèles ou confondues,
- des sens contraires.

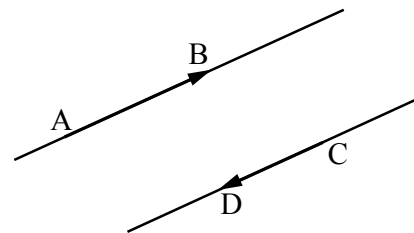


Figure 27: Vecteurs opposés

9.2. Somme de vecteurs

On veut faire la somme des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} (• figure 28).

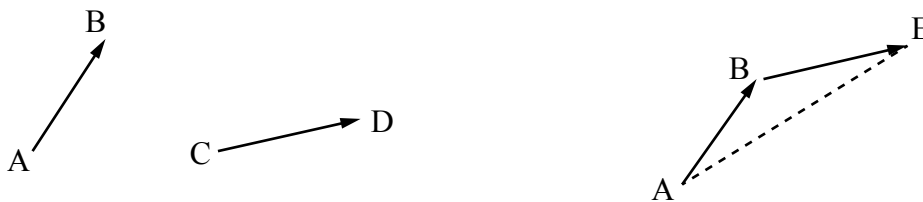


Figure 28: Somme de 2 vecteurs

Pour cela, à partir de B on trace le vecteur \overrightarrow{BE} équipollent à \overrightarrow{CD} . Le vecteur \overrightarrow{AE} est la somme des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} , ce qui s'écrit:

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$$

On peut faire la somme des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{EF} et \overrightarrow{GH} (• figure 29).

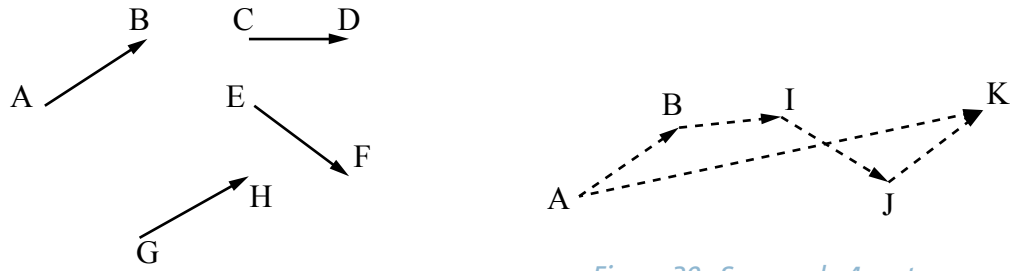


Figure 29: Somme de 4 vecteurs

Pour cela, à partir de B on trace le vecteur \overline{BI} équipollent à \overline{CD}). À partir de I, on trace le vecteur \overline{IJ} équipollent à \overline{EF} . À partir de J, on trace le vecteur \overline{JK} équipollent à \overline{GH} . Le vecteur \overline{AK} est la somme des vecteurs \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{EF} et \overline{GH} , ce qui s'écrit :

$$\overline{AK} = \overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{GH}$$

ATTENTION: La longueur du vecteur \overline{AK} n'est pas égale à la somme des longueurs des vecteurs \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{EF} et \overline{GH} .

9.3. Projection d'un vecteur sur un axe

On veut effectuer la projection orthogonale du vecteur \overline{AB} sur l'axe $x'x$.

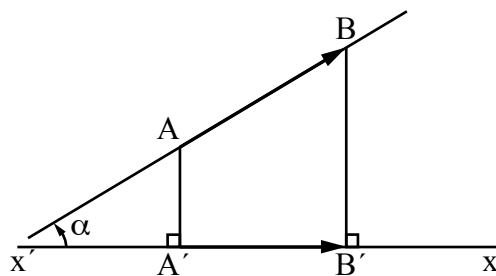


Figure 30: Projection d'un vecteur sur un axe

Pour cela, on trace AA' et BB' , qui sont perpendiculaires à l'axe $x'x$ (• figure 30). Le vecteur $\overline{A'B'}$ est la projection orthogonale du vecteur \overline{AB} sur l'axe xx' .

Les longueurs \overline{AB} et $\overline{A'B'}$ des vecteurs \overline{AB} et $\overline{A'B'}$ sont telles que :

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \alpha$$

La projection orthogonale sur un axe de la somme de plusieurs vecteurs est égale à la somme algébrique des projections orthogonales des vecteurs composants (• figure 31):

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \Rightarrow \overline{A'C'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'}$$

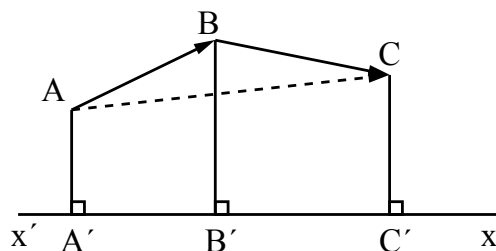


Figure 31: Projection d'une somme de vecteurs

10. EXERCICES

1- Calculer : $x = |3 - 7| - |-2| + |(-4) \times (-2)| \times |-5|$

2- Calculer : $x = 27^{1/3}$

3- Calculer : $x = 27^{-1/3}$

4- Calculer : $x = \frac{7/8}{4/5}$

5- Calculer : $x = \frac{2^{-0,3} \times 8^{1/3}}{2^{0,7}}$

6- Résoudre : $x - 7 > 3x - 2$

7- Développer $(2x + 5)^2$ et calculer la valeur pour $x = 2$

8- Tracer la courbe d'équation : $y = -3x - 2$

Indiquer le domaine où $y + 3x + 2 < 0$

9- Résoudre le système :
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

10- Résoudre le système :
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

11- Trouver les solutions de l'équation : $x^2 - 5x + 4 = 0$

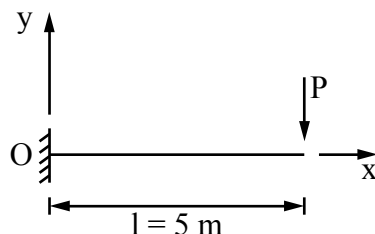
12- Trouver les solutions de l'équation : $x^2 + x - 6 = 0$

13- Tracer la courbe d'équation $y = x^2 + x - 6$

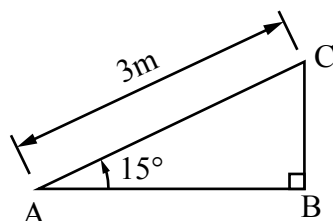
14- On considère une barre encastree à une extrémité et libre à l'autre extrémité, où une charge P est appliquée. On choisit le système d'axes Ox, Oy tel que représenté sur la figure. Sous l'action de la charge, compte tenu de sa valeur et des caractéristiques de la barre, la section située à l'abscisse x subit un déplacement dans la direction y donné par :

$$y = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{\ell x^2}{2} \right] \times 10^{-7} \quad \text{où } x, \ell, y \text{ sont en centimètres.}$$

Tracer la position déformée de la barre. Calculer la flèche à mi-longueur et à l'extrémité libre de la barre.



15- Calculer les longueurs des côtés AB et BC du triangle ABC .

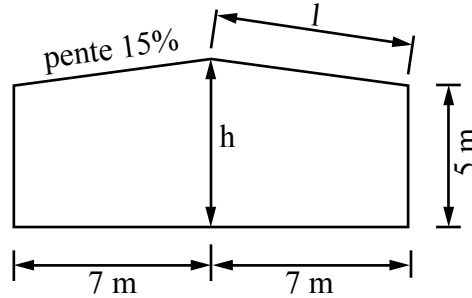


Chapitre 1: Rappels de mathématiques

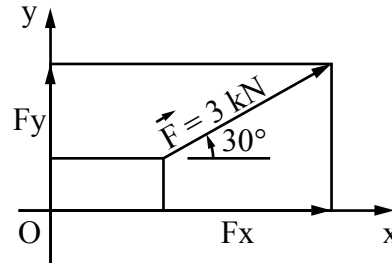
16- L'angle α est tel que $\sin \alpha = 0,6$. Calculer $\text{tg } \alpha$.

17- Pour ce bâtiment, calculer :

- la hauteur totale h ,
- la longueur l d'une traverse.

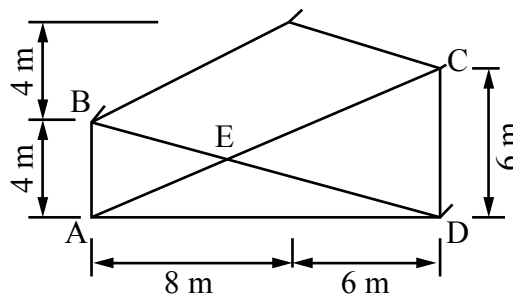


18- Calculer les valeurs des composantes F_x et F_y de cette force de 3 kN.



19- Pour le bâtiment représenté ci-contre :

- calculer la surface du bardage en pignon,
- calculer la pente de chaque versant de couverture,
- calculer la longueur de chaque traverse,
- calculer les longueurs AE, EC, BE et ED.



2 Notions de force et de couple

1. NOTION DE FORCE - SES EFFETS

Selon le dictionnaire Larousse, une force est « toute cause capable d'agir, de produire un effet ». Cette définition générale et abstraite peut être précisée dans le cas qui nous intéresse, et pour cela nous allons décrire les effets possibles d'une force.

La notion de force est liée pour nous à la sensation d'un effort musculaire à produire. Ainsi, si nous essayons de soulever un objet lourd, nous fournissons un effort musculaire qui développe une force dirigée de bas en haut. La force dans ce cas a pour effet de déplacer un objet qui était immobile.

Lorsque nous faisons du vélo, nous exerçons sur les pédales une force qui fait avancer le vélo. Si nous appuyons plus fort sur les pédales, donc si la force augmente, le vélo va plus vite. Si nous freinons, nous exerçons, par l'intermédiaire des patins, une force sur la jante qui fait ralentir puis arrêter le vélo. La force dans ce cas a pour effet de modifier le mouvement d'un corps.

En général, plusieurs forces agissent simultanément sur les corps. Lorsque nous appuyons sur les pédales d'un vélo, cette force sert à vaincre d'autres forces: la résistance de l'air, les frottements entre les parties mobiles du vélo, et éventuellement la force de la pesanteur qui nous attire vers le bas de la côte que nous voulons grimper.

Il existe une autre manière, pour une force, de se manifester, et c'est celle qui nous intéressera pour l'étude des structures: une force produit des déformations du corps sur lequel elle agit. Ces déformations sont souvent très faibles, non perceptibles à l'œil, même lorsque la force est importante, et pour cette raison cet effet de la force et l'existence même de la force sont plus difficiles à ressentir.

Ainsi lorsque l'on tire sur un ressort dont l'autre extrémité est fixée, le ressort s'allonge. Lorsque l'on appuie au milieu d'une règle soutenue à chaque extrémité (• figure 1), elle se déforme en prenant une flèche, d'abord peu perceptible puis plus grande et mesurable lorsque la force exercée augmente.

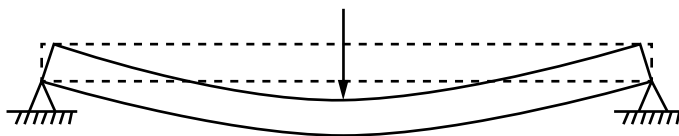


Figure 1: Force sur une règle

2. NATURE ET CARACTÉRISTIQUES DES FORCES

Les forces sont produites par des causes de différentes natures. Nous avons parlé des efforts musculaires, développés par le bras ou la jambe. Ils peuvent être remplacés par des systèmes mécaniques - des moteurs ou autres actionneurs - utilisant l'énergie électrique, thermique, hydraulique, qui engendrent des forces parfois très élevées.

Nous avons mentionné aussi les forces de vent, qui s'opposent au déplacement d'un cycliste ou d'une automobile - c'est la « résistance de l'air » - mais qui parfois au contraire ont un rôle moteur, lorsqu'elles actionnent les ailes d'un moulin à vent ou font avancer un trimaran.

La terre exerce une force d'attraction sur tous les objets, appelée force de pesanteur, qui nous permet de garder les pieds au sol au lieu de planer dans l'espace. À cause de cette force de pesanteur, il est plus facile sur un vélo de descendre une côte que de la monter.

Un aimant attire les pièces en fer ce qui met en évidence l'existence de forces magnétiques. Un électroaimant engendre des forces électromagnétiques, qui peuvent être suffisamment puissantes pour soulever par exemple des carcasses de voitures.

Ces forces d'origines différentes s'exercent parfois par contact direct sur un objet : il en est ainsi de la main qui soulève une valise, du pied qui appuie sur la pédale, du vent qui fait tourner les ailes d'un moulin.

Lorsque ce contact n'existe que sur une zone très limitée - la poignée de la valise, la pédale du vélo - les forces sont considérées comme « concentrées ». Lorsque le contact se produit sur toute une surface, les forces sont dites « réparties » : il en est ainsi pour la force de vent agissant sur un cycliste ou sur une voile de bateau.

Enfin certaines forces agissent à distance sur les objets, sans qu'il y ait contact avec ceux-ci : c'est le cas de la force magnétique qui attire un clou en acier vers un aimant, ou de la force de la pesanteur qui fait tomber une bille qu'on lâche au-dessus du sol.

Quelle que soit la cause qui produit la force, celle-ci s'applique en un point que l'on peut mettre en évidence : l'extrémité du ressort où l'on tire, la pédale sur laquelle le pied appuie et le centre de gravité des objets où s'exercent les forces de pesanteur comme nous le préciserons plus loin. Une force est donc caractérisée par un point d'application.

D'autre part, une force s'exerce suivant une direction et un sens bien déterminés : par exemple ceux de l'allongement du ressort sur lequel on tire ou ceux du mouvement de la bille qui tombe après avoir été lâchée sans vitesse. Une force est caractérisée aussi par une direction et un sens.

Enfin, une force a une intensité plus ou moins forte. On le constate par l'amplitude plus ou moins grande de la déformation qu'elle produit dans un corps, par exemple l'allongement d'un ressort. Une force est caractérisée également par son intensité.

L'unité de mesure de l'intensité d'une force est, dans le système légal d'unités, le newton (symbole N) et ses multiples, en particulier le décanewton (daN) égal à 10 newton et le kilonewton (kN) égal à 1 000 newton.

On utilise encore parfois le kilogramme-force (kgf), qui devrait être proscrit. En pratique, on emploie souvent le daN, qui diffère peu du kgf :

$$1 \text{ kgf} = 0,981 \text{ daN.}$$

Pour passer d'une mesure en kgf à une mesure en daN, il faut diminuer d'environ 2 % la valeur. Ainsi 24 kgf font 23,5 daN (et 235 N).

3. REPRÉSENTATION D'UNE FORCE

Une force est caractérisée par :

- son point d'application,
- sa direction (ou ligne d'action),
- son sens,
- son intensité.

On peut donc conventionnellement la représenter par un vecteur \vec{F} ayant (• figure 2) :

- une origine A située au point d'application de la force,
- une direction, celle de la force,
- un sens indiqué par la pointe du vecteur, identique à celui de la force,
- une longueur qui exprime, à une échelle donnée, l'intensité de la force. Par exemple un vecteur de longueur 1 cm représentera une force de 1 kN. Une force de 5,8 kN sera alors figurée par un vecteur de longueur 5,8 cm.

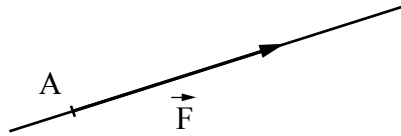


Figure 2 : Force représentée par vecteur

4. DÉCOMPOSITION D'UNE FORCE

Une force peut être remplacée par ses composantes dans diverses directions, comme on sait le faire avec les vecteurs. Ainsi la force du vent agissant sur les voiles d'un bateau peut être décomposée en une force dirigée suivant l'axe longitudinal du bateau, qui le fait avancer, et une force perpendiculaire à cet axe, qui le fait gîter et dériver.

Pour remplacer une force F par ses composantes dans deux directions quelconques $x'x$ et $y'y$, on représente la force par un vecteur (• figure 3). Depuis l'origine A du vecteur, on mène les parallèles Ax et Ay à ces deux directions. On procède de même depuis l'extrémité B du vecteur. On obtient ainsi un parallélogramme dont la force F est l'une des diagonales. Les côtés de ce parallélogramme portent les composantes F_x et F_y de la force F. On peut écrire :

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

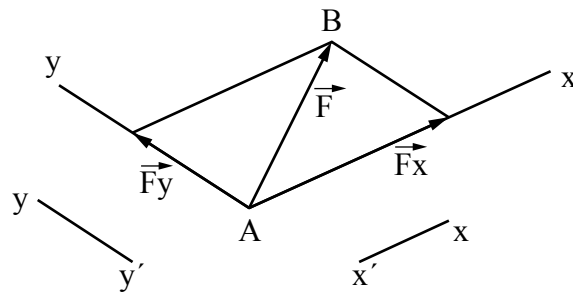


Figure 3 : Décomposition d'une force

Lorsque les deux directions envisagées sont perpendiculaires entre elles, le parallélogramme devient un rectangle (• figure 4). Tracer le rectangle revient à abaisser depuis l'extrémité B du vecteur les perpendiculaires sur les axes Ax et Ay.

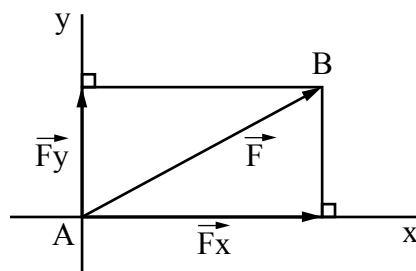


Figure 4 : Directions perpendiculaires

5. MOMENT D'UNE FORCE

Considérons une force F située dans un plan et un point O de ce plan (• *figure 5*). En O on trace l'axe $z'z$ perpendiculaire au plan. Du point O on abaisse la perpendiculaire sur la ligne d'action de la force, c'est-à-dire sur la droite qui représente la direction de la force. On note d la distance entre le point O et la ligne d'action de la force : d est égale à la longueur OH .

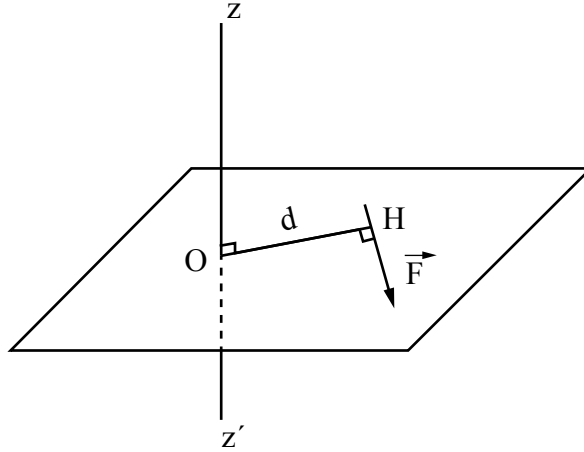


Figure 5 : Moment d'une force

Par définition, le moment M de la force F par rapport à l'axe $z'z$ (ou par rapport au point O) est égal au produit de l'intensité de la force par la distance d :

$$M = F \times d$$

Un moment s'exprime en newton. mètre (N.m) ou les multiples (daN.m ; kN.m ; N.cm ; ...).

L'effet du moment d'une force par rapport à un point est de produire des rotations par rapport à ce point. Ainsi, lorsqu'on veut serrer un écrou à l'aide d'une clé (• *figure 6*), on applique un moment le plus élevé possible, ce qui est obtenu soit en augmentant la force F , soit en augmentant la distance d .

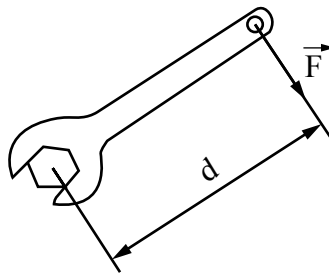


Figure 6 : Serrage d'un écrou

On choisit une convention de signe pour le moment par rapport à un point : par exemple il est positif lorsque la force tend à produire une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre par rapport au point.

Si on considère plusieurs forces situées dans un même plan et un point O de ce plan, on peut calculer le moment de chacune de ces forces par rapport à O , et affecter un signe positif ou négatif à ce moment, suivant le sens de la rotation qu'il provoquerait. Le moment dû à l'ensemble des forces agissant simultanément est appelé moment résultant. Il est égal à la somme algébrique des moments dus à chacune des forces. Ainsi, pour les forces représentées à la *figure 7*, le moment résultant par rapport à O est donné par :

$$\begin{aligned}
 M_o &= 12 \times 2 - 5 \times 3 - 3 \times 2 \\
 &= 24 - 15 - 6 \\
 &= 3 \text{ N.m}
 \end{aligned}$$

(sens positif choisi : sens des aiguilles d'une montre)

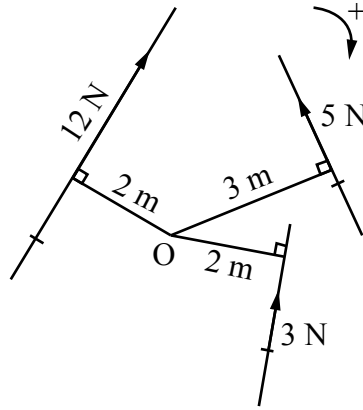


Figure 7 : Moment résultant

6. NOTION DE COUPLE DE FORCES

Un couple de forces est un ensemble de deux forces de même intensité, portées par des lignes d'action parallèles (non confondues), mais de sens opposés (• figure 8).

Un tel couple de forces, appliqué sur un corps, a pour effet de produire un mouvement de rotation ou des déformations correspondant à une rotation si le mouvement est empêché. L'efficacité du couple de forces est d'autant plus grande que l'intensité F de chaque force est élevée et que la distance D entre les deux forces est importante.

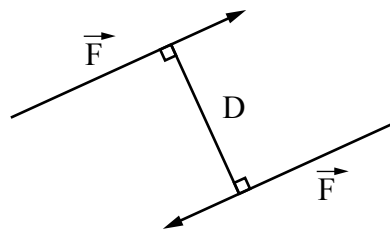


Figure 8 : Couple de forces

Prenons un point O quelconque dans le plan des forces. Le moment résultant par rapport à O de ces deux forces est donné par (• figure 9) :

$$\begin{aligned}
 M_R &= F \times d_1 + F \times d_2 \\
 &= F(d_1 + d_2) \\
 &= F \times D
 \end{aligned}$$

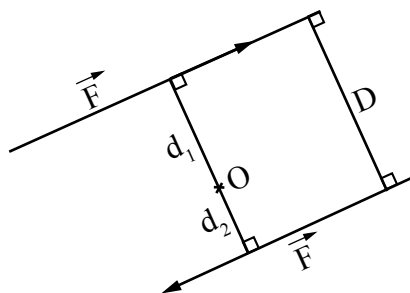


Figure 9 : Moment d'un couple

Le moment par rapport à un point d'un couple de forces est indépendant de la position du point, dans le plan des forces, que ce point soit situé entre les deux forces ou à l'extérieur de celles-ci. Le moment d'un couple de forces est égal au produit de l'intensité de chacune des forces par la distance entre ces forces :

$$M_R = F \times D$$

On choisit là encore une convention de signe pour le moment du couple de forces (par exemple positif s'il tend à faire tourner dans le sens des aiguilles d'une montre).

7. RÉSULTANTE DE FORCES CONCOURANTES

Considérons plusieurs forces concourantes représentées chacune par un vecteur. Faisons la somme géométrique de ces vecteurs : nous obtenons le vecteur \vec{R} . Par définition, la résultante des forces est la force représentée par ce vecteur.

Pour obtenir la résultante R de deux forces F_1 et F_2 concourantes en A , on trace le parallélogramme ayant pour côtés ces deux forces (• figure 10). La résultante est la diagonale de ce parallélogramme.

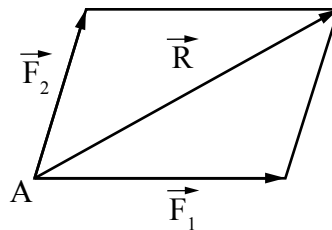


Figure 10: Résultante de 2 force

Pour obtenir la résultante de plusieurs forces concourantes F_1, F_2, F_n , on représente toutes ces forces par des vecteurs. À l'extrémité du vecteur F_1 , on trace le vecteur F'_2 équipollent à F_2 , puis à l'extrémité de celui-ci le vecteur F'_3 équipollent à F_3 , et ainsi de suite jusqu'à F'_n (• figure 11). Le vecteur R représentant la résultante des forces part de l'origine du vecteur F_1 et va jusqu'à l'extrémité du vecteur F'_n équipollent à F_n .

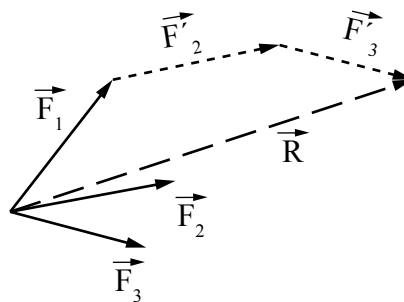


Figure 11: Résultante de 3 forces

8. RÉSULTANTE DE FORCES PARALLÈLES

La résultante de plusieurs forces parallèles est représentée par un vecteur qui est la somme géométrique des vecteurs représentant les forces considérées.

La ligne d'action de ce vecteur résultant est parallèle aux lignes d'action des autres vecteurs. Sa position doit être telle que le moment de la résultante par rapport à un point quelconque soit égal à la somme algébrique des moments de chacune des forces par rapport à ce point.

Le point par rapport auquel on calcule le moment est quelconque : on aboutit à la même position de la résultante quel que soit le point considéré.

Exemple : Déterminons la résultante des 3 forces parallèles, d'intensité 3 kN, 2 kN et 5 kN, représentées à la figure 12.

L'intensité de cette résultante est donnée par :

$$R = 3 + 2 + 5 = 10 \text{ kN}$$

Par ailleurs, le moment par rapport à O de la résultante doit être égal à la somme algébrique des moments des 3 forces, soit :

$$R \times d = 3 \times 5 + 2 \times 3 + 5 \times 0 \quad \text{d'où} \quad d = 21/R = 21/10 = 2,10 \text{ m}$$

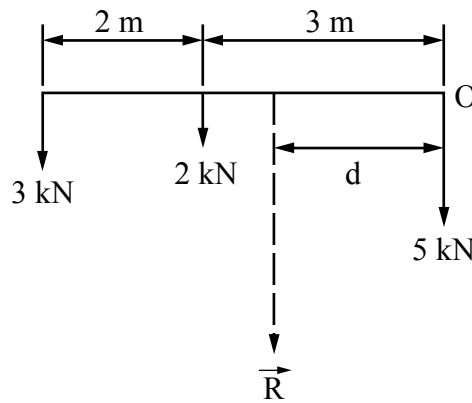


Figure 12 : Résultante de 3 forces

9. FORCE DE PESANTEUR

Une des lois régissant l'univers est celle de la gravitation : deux corps de masses M et m exercent l'un sur l'autre une force d'attraction, proportionnelle au produit des deux masses et inversement proportionnelle au carré de la distance d entre leurs centres de gravité :

$$F = k \frac{M.m}{d^2}$$

Cette force d'attraction existe entre le soleil et la terre, entre la terre et la lune, mais aussi entre notre pied droit et notre pied gauche, entre un crayon et une feuille de papier, même si dans ces deux derniers cas les forces sont extrêmement faibles, non mesurables, car les deux masses sont petites.

Si l'un des corps est la terre et l'autre un objet situé à la surface de celle-ci, l'attraction qui s'exerce, qui est un cas particulier de la gravitation universelle, est appelée pesanteur. Un corps situé en un point de la surface de la terre subit ce champ de pesanteur : il est attiré vers la terre par une force, qu'on appelle poids, dont la direction définit la verticale au point considéré. Si on éloigne ce corps de quelques dizaines ou centaines de kilomètres de la surface de la terre, son poids diminue, car la distance qui le sépare du centre de gravité de la terre augmente. Par contre sa masse reste constante : elle représente la quantité de matière constituant le corps.

À la surface de la terre, la force de pesanteur agissant sur une masse m a pour valeur :

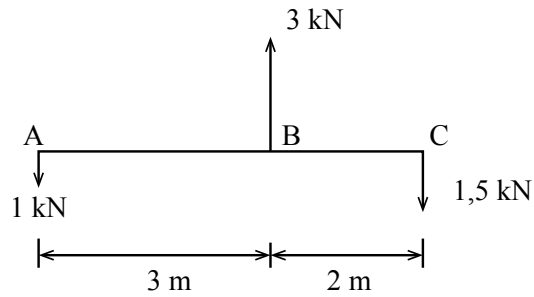
$$F = m.g$$

avec $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, m en kilogramme et F en newton

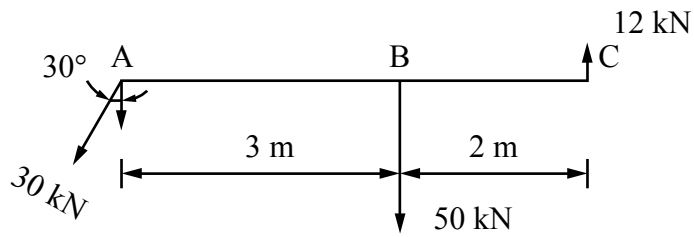
La pesanteur s'exerce sur chacune des particules de matière constituant un objet. La résultante de toutes ces petites forces est le poids de l'objet, et il agit par définition au centre de gravité de celui-ci.

10. EXERCICES

1- Déterminer la résultante de ces 3 forces parallèles :



2- Déterminer la résultante de ces 3 forces :



3 Équilibre d'une structure

1. DÉFINITION

Nous nous limitons au cas de structures et autres solides soumis à des forces et couples agissant dans un même plan, qui est en général un plan vertical.

Un solide soumis à certaines forces est en équilibre si et seulement si, il ne subit aucune accélération ou décélération. En particulier, un solide initialement immobile est en équilibre s'il reste immobile.

Une structure soumise à l'action de charges extérieures se déforme sous l'effet de ces charges. Ces déformations existent, même si elles sont habituellement trop faibles pour être visibles à l'œil nu. La plupart des éléments de matière constituant cette structure subit des déplacements, généralement très petits. Une structure soumise à des charges données est en équilibre lorsqu'il ne se produit aucune variation de déformation ou déplacement tant que les charges restent constantes.

2. ACTIONS, EFFORTS DE LIAISON

2.1. Actions extérieures

Une structure située dans un environnement donné va être soumise à diverses actions : forces extérieures, variations de température, Les forces extérieures sont le poids de la structure et des autres matériaux, les charges d'exploitation, le poids de la neige, la pression du vent... Ces forces peuvent être concentrées ou réparties et de directions diverses.

2.2. Appuis

Une structure possède toujours un ou plusieurs appuis, assurant des liaisons avec le milieu physique environnant : contacts des pieds d'une table sur un plancher, assemblage d'une extrémité de poutre ou de poteau sur un massif en béton... Une structure soumise à un chargement donné exerce des forces et parfois des couples sur ses appuis. Chaque appui résiste à ces efforts, et pour cela exerce sur la structure des forces et couples, opposés aux précédents, appelés réactions.

Le rôle d'un appui est d'empêcher qu'un (ou plusieurs) déplacement en un point d'une structure ne se produise, parmi les trois déplacements possibles : translation verticale, translation horizontale et rotation. Pour empêcher ce ou ces déplacements, l'appui exerce sur la structure une ou des réactions, parmi les trois possibles : force verticale, force horizontale et moment. On ne connaît pas a priori les valeurs de ces réactions, mais il est possible soit de les mesurer par des appareils appropriés, soit de les déterminer par le calcul. Connaissant ces réactions, on peut alors, dans l'imaginaire, supprimer l'appui et le remplacer par des charges extérieures égales aux réactions d'appui, appliquées là où se trouvait l'appui : la structure ne subira aucun changement. La structure devient alors libre dans l'espace, en équilibre sous l'effet de forces et couples : les charges extérieures réelles et les réactions d'appui, assimilées à des charges extérieures. L'effet d'un appui est d'empêcher que certains déplacements en un point d'une structure ne se produisent,

et l'appui obtient ce résultat uniquement en exerçant les réactions appropriées en ce point de la structure.

Pour empêcher une translation verticale, l'appui exerce une réaction qui est une force verticale. Pour empêcher une translation horizontale, il exerce une force horizontale. Enfin, pour empêcher une rotation, il exerce un moment (ou couple).

Pour les structures planes chargées dans leur plan, il existe trois types d'appuis :

a) l'**appui glissant** : une seule translation est empêchée, qui est en général la translation verticale. La translation horizontale et la rotation sont libres. La réaction d'appui se limite alors à une force verticale.

b) l'**appui articulé** : les translations verticale et horizontale sont empêchées. Seule la rotation est libre. Les réactions sont constituées d'une force verticale et d'une force horizontale.

c) l'**appui encastré** : les trois déplacements sont empêchés : translation verticale, translation horizontale et rotation. Les réactions d'appui sont une force verticale, une force horizontale et un moment.

Plusieurs dispositions constructives, présentées dans d'autres documents, permettent de réaliser l'un ou l'autre de ces types d'appui. Leur représentation symbolique est indiquée à la [figure 1](#), où (a) est un appui glissant, (b) un appui articulé et (c) un appui encastré.

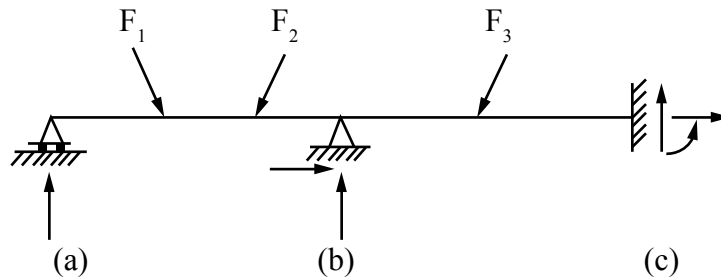


Figure 1 : Représentation symbolique des appuis et des réactions

2.3. Efforts de liaison

Lors de calculs, on est amené à considérer l'équilibre d'une structure dans son ensemble, mais parfois aussi l'équilibre d'une partie de structure, par exemple d'une barre de portique, ou même d'un tronçon de barre. Les forces et couples qui agissent sur une barre de structure peuvent provenir de trois origines :

- les charges extérieures, lorsque leur point d'application est situé sur la barre ;
- les réactions d'appui, si un point de cette barre est lié à un tel appui ;
- les efforts de liaison, qui sont les forces et couples qu'exercent sur la barre étudiée les diverses barres liées à celle-ci. Ils peuvent être transmis par l'intermédiaire d'assemblages (soudés, boulonnés...).

Lorsqu'on étudie l'équilibre de la barre, on considère qu'elle est isolée dans l'espace et soumise à un ensemble de forces et couples constitué de ces charges extérieures, réactions d'appuis et efforts de liaisons éventuels s'exerçant directement sur la barre.

Les efforts de liaison proviennent de la cohésion qui existe entre tous les composants d'une structure, et entre les particules constituant chaque composant. Pour se représenter ces efforts, imaginons un corps au repos, c'est-à-dire non chargé. Les particules constituant ce corps exercent les unes sur les autres, à l'échelle microscopique, des forces de cohésion, qui les maintiennent en place. Ces forces s'équilibrent entre elles. Nous pouvons représenter le corps au repos par un réseau de billes (particules) reliées par des ressorts (assurant la cohésion), comme indiqué à la [figure 2](#).

Si nous exerçons sur la bille A du réseau au repos une force extérieure F , la bille subit un déplacement et l'équilibre initial du réseau est rompu : toutes les billes se déplacent les unes par rapport aux autres. Des ressorts se tendent, d'autres se compriment, produisant des forces supplémentaires, dites forces intérieures ou efforts internes, qui s'opposent progressivement aux déplacements des particules. Il en résulte un nouvel état d'équilibre, avec certains efforts internes, certaines déformations (allongements ou raccourcissements des ressorts) et certains déplacements des particules (• *figure 3*). La force extérieure F doit bien sûr être telle que les efforts internes (efforts dans les ressorts) ne dépassent pas la capacité de résistance de ces ressorts. Dans le cas contraire, il y aurait rupture.

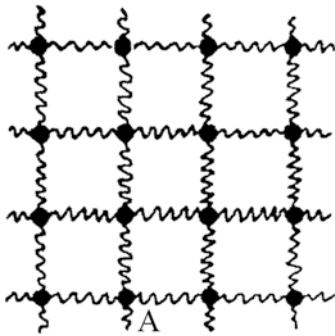
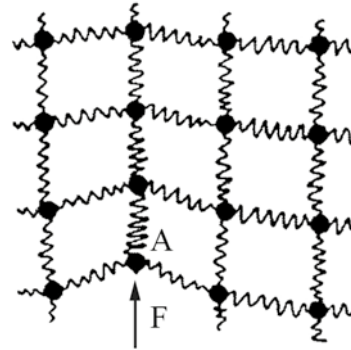


Figure 2 : Particules au repos

Figure 3 : Particules avec force F

Supprimons la force F . Si les particules reviennent dans leur position initiale, les déformations qui s'étaient produites étaient élastiques, c'est-à-dire réversibles. Dans le cas contraire, il subsiste certaines déformations permanentes, appelées déformations plastiques.

3. SOLIDE SOUMIS À DES FORCES CONCOURANTES

Pour qu'un solide soumis à des forces concourantes soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante de ces forces soit nulle. En particulier, s'il y a seulement deux forces, elles doivent être opposées c'est-à-dire avoir même ligne d'action, même intensité mais des sens opposés. (• *figure 4*).

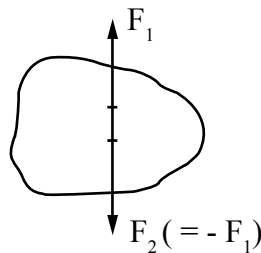


Figure 4 : Forces opposées

4. STRUCTURE SOUMISE À DES FORCES PARALLÈLES

Pour qu'une structure soumise à des forces parallèles soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante des forces soit nulle et que le moment résultant des forces par rapport à un point choisi arbitrairement soit nul.

Ceci permet en particulier d'étudier l'équilibre d'un levier (• *figure 5*). Pour maintenir en équilibre une charge de poids P , il faut exercer à l'autre extrémité du levier une force F telle que :

- la somme des moments par rapport au point A soit égale à zéro :

$$-F \times a + R \times 0 + P \times b = 0$$

soit $F \times a = P \times b$ ou $F = P \times b/a$

- la résultante des forces soit égale à zéro :

$$R - P - F = 0$$

soit $R = P + F = P(1 + b/a)$

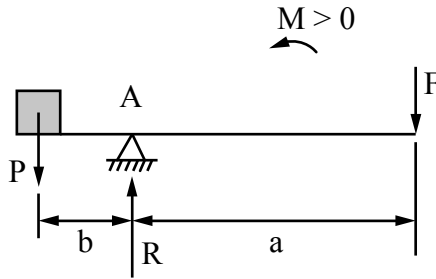


Figure 5 : Levier

5. STRUCTURE SOUMISE À DES FORCES ET COUPLES QUELCONQUES

Pour qu'une structure soumise à des forces et couples situés dans un même plan soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante des forces soit nulle et que le moment résultant des forces et couples par rapport à un point quelconque soit nul.

On prend les composantes des forces suivant deux axes O_x et O_y , généralement un axe horizontal et un axe vertical. Pour que la résultante des forces soit nulle, il faut et il suffit que les sommes de leurs composantes suivant d'une part l'axe O_x et d'autre part l'axe O_y soient nulles, ce qui nous donne deux équations. Une troisième équation est obtenue en écrivant que la somme des moments par rapport à un point quelconque A, dus à l'ensemble des forces et couples, est nulle. Il y a donc trois équations d'équilibre indépendantes :

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

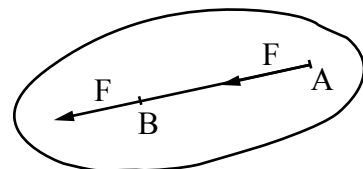
Les forces et couples à prendre en compte pour écrire les équations d'équilibre d'une structure sont les charges extérieures mais aussi les réactions d'appui, même si leurs valeurs sont inconnues. Ces trois équations d'équilibre permettent, pour certaines structures, de déterminer les valeurs des réactions d'appui.

Lorsqu'on écrit les équations d'équilibre d'une partie de structure (par exemple une barre), aux charges et réactions agissant directement sur cette partie de structure il faut ajouter les efforts exercés par le reste de la structure sur cette partie, à travers leurs liaisons.

On ne modifie pas les conditions d'équilibre d'un solide ou d'une structure (• figure 6) :

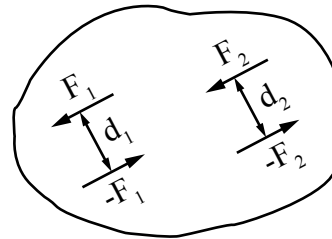
1) en déplaçant une force le long de sa ligne d'action

Ainsi, la force F appliquée en A peut être déplacée en B sans changer l'équilibre du corps.



2) en déplaçant un couple dans son plan

L'équilibre n'est pas modifié si on remplace le couple (F_1 et $-F_1$) par le couple (F_2 et $-F_2$), avec : $F_1 = F_2$ et $d_1 = d_2$.



3) en ajoutant des forces concourantes ayant une résultante nulle

En particulier, on peut ajouter deux forces opposées, F_1 et F_2 .

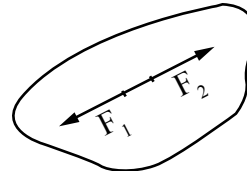


Figure 6 : Équilibre non modifié

4) en ajoutant des couples ayant un moment résultant nul

5) en remplaçant des forces par leur résultante

Ainsi on peut remplacer une force répartie ou deux forces concourantes par leur résultante. La résultante d'une force uniformément répartie agissant sur un tronçon de barre est située au milieu de ce tronçon. La résultante d'une charge répartie triangulaire (variant linéairement de la valeur zéro à une valeur maximale) agissant sur un tronçon de barre est située au tiers de la longueur de ce tronçon (du côté le plus chargé).

6) en déplaçant une force F parallèlement à elle-même à condition d'ajouter un couple de moment $M = F \cdot d$, où d est la distance entre les lignes d'actions initiale et finale (• figure 7)

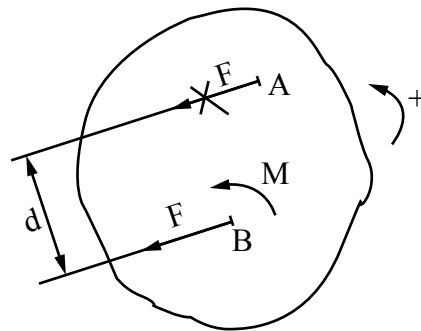


Figure 7 : Déplacement d'une force

Ceci résulte directement du cas 3: initialement seule la force F agit en A (• figure 8). Au point B, on ajoute deux forces opposées, l'une égale à F l'autre à $-F$, ce qui ne modifie pas l'équilibre du corps. Cet ensemble de 3 forces se ramène à un couple de forces (force F en A et force $-F$ en B) de moment $M = F \times d$ et une force F en B. Il faut veiller au signe du moment M . Choisissons comme sens positif pour les moments le sens trigonométrique. Lorsque seule la force F agit en A, son moment par rapport au point B est positif, avec la convention de signe choisie. Lorsqu'on transporte cette force en B, son moment par rapport au point B est nul. Donc le moment du couple qu'on ajoute doit être positif, c'est-à-dire orienté ici dans le sens trigonométrique.

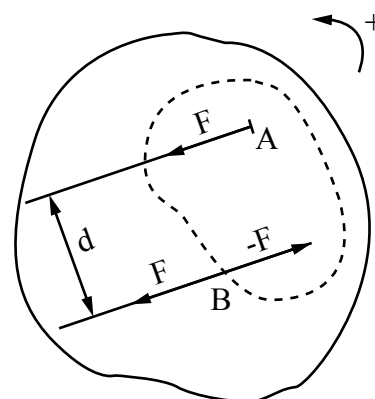
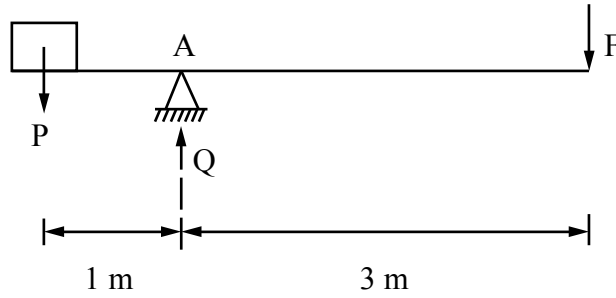


Figure 8 : Force et couple

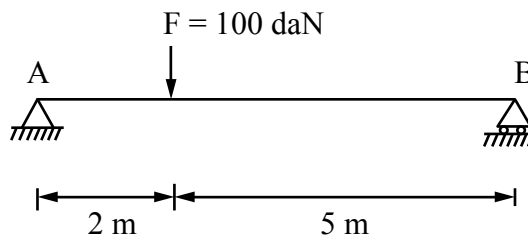
6. EXERCICES

1- Pour ce levier, déterminer :

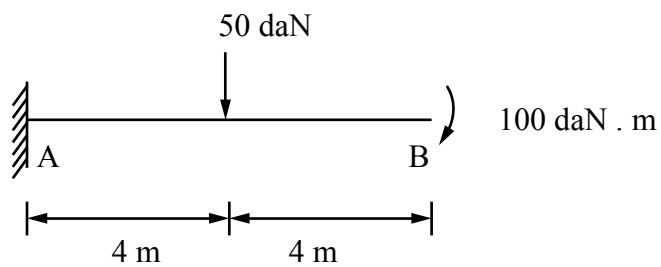
- la force F nécessaire pour soulever le poids P , avec $P = 100 \text{ daN}$
- la réaction d'appui Q .



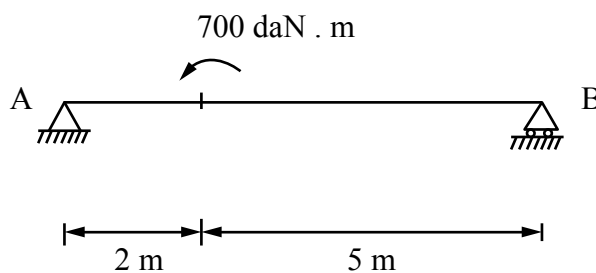
2- Déterminer les réactions en A et B.



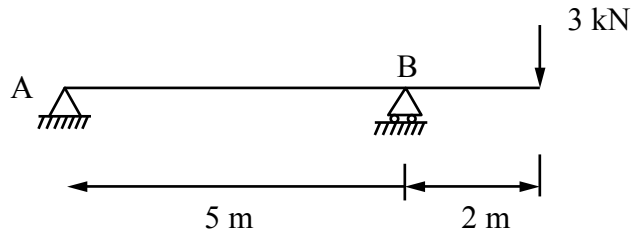
3- Déterminer les réactions d'appui.



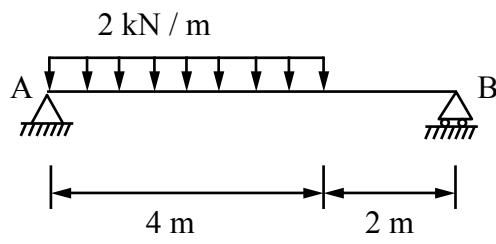
4- Déterminer les réactions d'appui.



5- Déterminer les réactions d'appui.



6- Déterminer les réactions d'appui.



Sollicitation dans une section

1. DÉFINITIONS ET HYPOTHÈSES RELATIVES AUX BARRES

Une barre est un élément de construction relativement long et étroit, employé pour réaliser des structures.

La notion de barre est utilisée en résistance des matériaux : il a été établi un certain nombre de formules et propriétés, que nous étudierons ultérieurement, relatives aux barres. Ces formules expriment par exemple les valeurs des allongements ou flèches des barres en fonction des charges, ou encore les valeurs des contraintes dans une section de barre en fonction des sollicitations. Pour que ces formules ou propriétés traduisent la réalité, il faut que l'élément appelé « barre » satisfasse à un certain nombre de conditions que nous allons présenter.

On définit pour la barre une « ligne moyenne », qui est généralement rectiligne mais qui peut aussi être courbe, et des « sections droites » ou « sections transversales » qui sont perpendiculaires à la ligne moyenne. Les sections droites peuvent avoir des formes très diverses : carrées, rectangulaires, circulaires, trapézoïdales, ou bien encore en H, en U, en Z. Par définition, la ligne moyenne est la ligne passant par le centre de gravité de toutes les sections transversales.

En résistance des matériaux, la ligne moyenne d'une barre peut être courbe, mais alors son rayon de courbure R doit être grand par rapport à la hauteur h de la section droite, dans le plan de courbure (• *figure 1*). On considère généralement qu'on doit avoir : $R > 5 h$

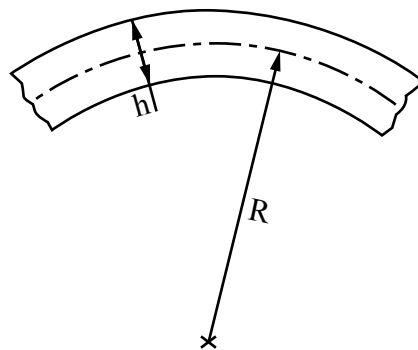


Figure 1: Barre courbe

La longueur L de la barre doit être grande par rapport à la hauteur h de la section transversale, dans le plan de chargement (• *figure 2*). On considère généralement qu'on doit avoir : $L > 5 h$ Cependant, la flèche due à l'effort tranchant, dont on ne tient pas compte habituellement, n'est négligeable que si $L > 10 h$, comme on le verra ultérieurement. Lorsque $5 h < L < 10 h$, cette flèche est égale à environ 5 à 10 % de la flèche due au moment de flexion, donnée dans les formulaires.

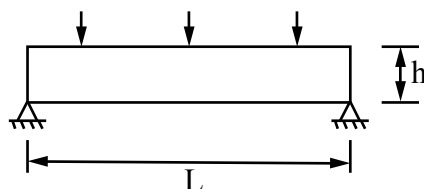


Figure 2: Dimensions de barre

Chapitre 4 : Sollicitation dans une section

La section transversale de la barre doit être constante ou varier peu lorsqu'on se déplace le long de la barre. Ainsi on considère généralement qu'en cas de variation linéaire de la hauteur de section, on doit avoir (• *figure 3*): $L_0 \geq 3 h_0$

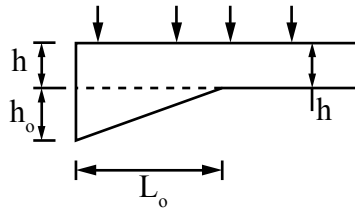


Figure 3 : Barre à section variable

Lorsqu'on schématise une structure constituée de barres, on représente chaque barre par une ligne, qui est la ligne moyenne de la barre (ligne passant par le centre de gravité des sections transversales). Nous ne considérerons ici que le cas où les barres présentent un plan de symétrie (généralement un plan vertical) et où toutes les charges agissent dans ce plan de symétrie.

2. DÉFINITION DES SOLLICITATIONS

Les sollicitations dans une section sont les forces et moment(s) résultants, au centre de gravité de la section, de toutes les forces internes qui agissent sur l'une des faces de cette section. Dans le cas de barres présentant un plan de symétrie et chargées dans ce plan, les sollicitations dans une section se composent :

- d'un effort normal ou effort axial, noté N
- d'un effort tranchant, noté V
- d'un moment de flexion, noté M

Les sollicitations sont parfois appelées « efforts » ou « efforts internes ». Il faut distinguer le terme « sollicitation » du terme « action » : ce dernier désigne essentiellement les charges qui agissent sur une structure (la pression du vent, le poids de la neige, le poids propre de la structure,...). Les sollicitations dans une section sont les effets, dans cette section, des actions qui agissent sur la structure.

Considérons une section droite particulière (S) d'une barre en équilibre sous certaines charges (• *figure 4*).

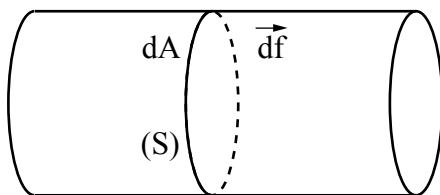


Figure 4 : Section droite de barre

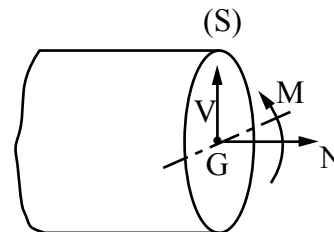


Figure 5 : Sollicitations

La partie de barre située à droite de cette section exerce, dans le cas général, une petite force \overline{df} sur chaque petit élément de surface dA composant cette section. Les résultantes de toutes ces petites forces \overline{df} , ramenées au centre de gravité G de la section, se composent de (• *figure 5*) :

- une force dirigée perpendiculairement à la section (S) : c'est l'effort normal N dans la section ;
- une force agissant dans le plan de la section (S) : c'est l'effort tranchant V dans la section ;

- un moment par rapport à l'axe passant par le centre de gravité G et perpendiculaire au plan de chargement: c'est le moment de flexion M dans la section.

On adopte comme convention que les sollicitations sont positives si elles sont dirigées dans les sens représentés à la *figure 5*, lorsqu'on considère les efforts qu'exerce sur la section la partie de barre située à droite de celle-ci. Elles sont négatives dans le cas contraire. Donc pour une poutre horizontale :

- un effort normal de traction est positif,
- un effort tranchant dirigé vers le haut est positif,
- un moment de flexion comprimant la fibre supérieure de la poutre est positif.

Considérons maintenant une section (S) , à laquelle nous donnons une réalité matérielle (*figure 6*) en la représentant sous la forme d'une tranche très mince de barre (épaisseur infiniment petite).

Dans le cas où il n'y a pas de charge extérieure concentrée agissant sur cette tranche, celle-ci est un solide en équilibre sous l'action :

- des efforts qu'exerce sur la tranche la partie de barre située à droite de la section (S) . Ces efforts ne sont autres que les sollicitations N , V et M que nous venons de définir, représentées en traits pleins sur la *figure 6* ;
- des efforts qu'exerce sur la tranche la partie de barre située à gauche de la section (S) . Ces efforts, ramenés au centre de gravité G , se composent des forces N' et V' et du moment M' , représentés en traits pointillés.

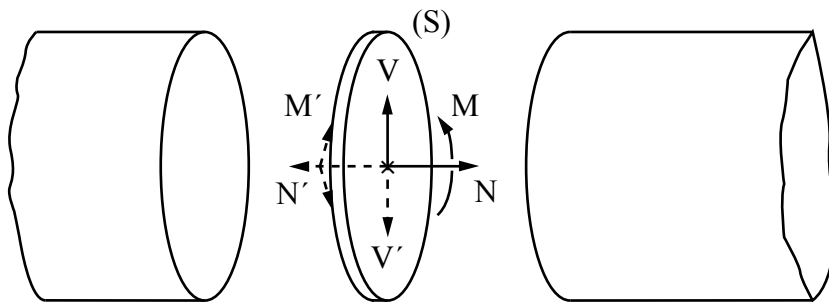


Figure 6: Équilibre d'une section

Pour que la tranche soit en équilibre, N' , V' et M' doivent avoir mêmes intensités que N , V et M mais des sens opposés, comme représenté sur la *figure 6*.

Ainsi, pour connaître les sollicitations dans une section, on peut déterminer les efforts qu'exerce sur la section la partie de barre située à droite de celle-ci et les compter positivement dans le sens de N , V , M représentés aux *figures 5 et 6*, ou déterminer les efforts qu'exerce sur la section la partie de barre située à gauche de celle-ci et les compter positivement dans le sens de N' , V' , M' représentés à la *figure 6*. Les valeurs obtenues par les deux méthodes sont les mêmes (même intensité et même signe).

3. TRACE DES DIAGRAMMES DE SOLLICITATIONS

Considérons la poutre horizontale représentée à la *figure 7*, soumise à une force F appliquée à son extrémité, et une section (S) de cette poutre :

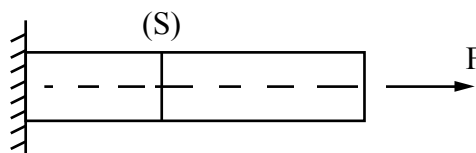


Figure 7: Poutre étudiée

Chapitre 4 : Sollicitation dans une section

Les efforts qu'exerce sur la section (S) la partie de poutre située à droite de la section (S) se limitent de façon évidente à une force horizontale égale à F. La force F circule depuis son point d'application, à l'extrémité droite de la barre, jusqu'à l'encastrement, à l'extrémité gauche de la barre, en traversant toutes les sections droites.

Dans la section (S) de la barre, les sollicitations ont donc pour valeurs :

- effort normal $N = F$
- effort tranchant $V = 0$
- moment de flexion $M = 0$

Considérons maintenant la même poutre horizontale soumise à son extrémité droite à une force horizontale F et une force verticale P, dirigées dans le sens des flèches (• figure 8). Nous allons déterminer les sollicitations dans la section (S) située à la distance x_0 de l'encastrement, la longueur de la barre étant L.

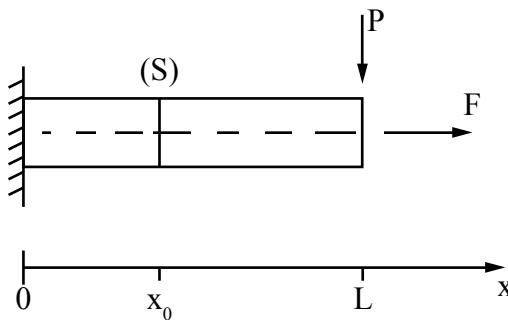


Figure 8 : Poutre étudiée

Pour cela nous transportons au centre de gravité de la section (S) toutes les forces agissant sur la partie de poutre située à droite de la section (S), en respectant les principes de la statique. Nous obtenons en ce point G (• figure 9) :

- une force horizontale F
- une force verticale P
- un moment de flexion $P(L - x_0)$, car lorsqu'on transporte la force P au point G, sa ligne d'action se déplace, parallèlement à elle-même, de la distance $(L - x_0)$.

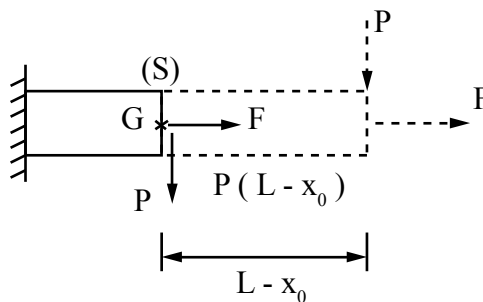


Figure 9 : Sollicitations dans la section (S)

Dans la section (S) de la barre, les sollicitations ont donc pour valeur, avec la convention de signe adoptée :

- effort normal $N = F$
- effort tranchant $V = - P$
- moment de flexion $M = - P(L - x_0)$

Considérons enfin le cas où la barre étudiée fait partie d'une structure (• figure 10). Pour obtenir les

sollicitations dans la section (S), on transporte en son centre de gravité G, en respectant les règles de la statique, toutes les forces et tous les couples agissant sur la partie de structure située d'un côté de la section. Ces forces et couples sont d'une part des charges extérieures (forces F et P agissant en A) et d'autre part des réactions d'appui (forces R_0 et H_0 et couple C_0 agissant en B).

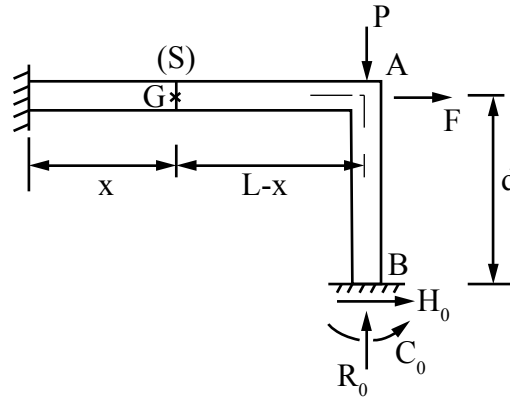


Figure 10: Structure étudiée

Dans la section (S), les sollicitations ont pour expression :

- effort normal $N = H_0 + F$
- effort tranchant $V = R_0 - P$
- moment de flexion $M = C_0 + H_0 d + R_0 (L - x) - P (L - x)$

Par cette méthode, on peut ainsi calculer les sollicitations dans toutes les sections des barres constituant une structure et représenter graphiquement, sur un schéma de la structure, l'amplitude des sollicitations dans chaque section. On obtient ainsi les diagrammes d'effort normal, d'effort tranchant et de moment de flexion dans la structure.

Remarque 1: Lorsqu'une charge concentrée est appliquée dans une section, la sollicitation correspondante varie brutalement au passage de cette section. Ainsi pour la poutre et le chargement représentés à la *figure 11*, l'effort tranchant est égal à $-P$ dans la section à droite de la section (S) et à $(-P - Q)$ dans la section à gauche de la section (S).

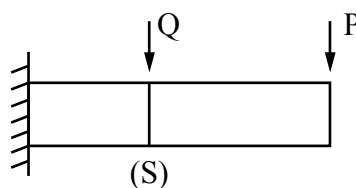


Figure 11: Charge concentrée dans la section (S)

Remarque 2: On peut sans difficulté calculer les sollicitations dans la section (S') connaissant d'une part les sollicitations N, V et M dans la section (S) et d'autre part les charges appliquées sur le tronçon de barre compris entre les sections (S) et (S').

Les sollicitations dans la section (S) représentent les actions que la partie de barre située à droite de (S) exerce sur la partie de barre située à gauche de (S). Pour la partie de barre ou de structure située à gauche de la section (S), les sollicitations N, V et M ont même effet que des charges extérieures et peuvent donc être considérées comme telles.

Pour la structure représentée à la *figure 12*, les sollicitations dans la section (S') ont pour expression :

- effort normal $N' = N$
- effort tranchant $V' = V - Q$
- moment de flexion $M' = M + V d_2 - Q d_1$

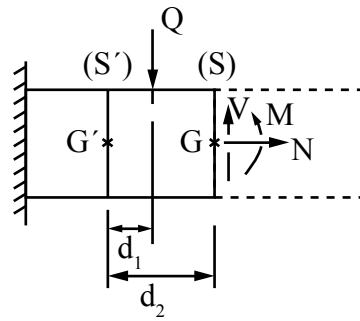


Figure 12: Sollicitations

Remarque 3 : On trace les diagrammes d'effort normal, d'effort tranchant et de moment de flexion afin de déterminer pour chaque barre la section la plus sollicitée, c'est-à-dire celle dans laquelle l'effort normal, l'effort tranchant, le moment de flexion, ou une combinaison de ces sollicitations, est maximal. Dans cette recherche, on peut s'aider de la propriété suivante qui est vraie pour toutes les barres: si dans une section située entre les extrémités d'une barre le moment de flexion présente un maximum ou un minimum, l'effort tranchant est nul dans cette section :

$$V = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ est maximum ou minimum}$$

Exemple 1: Tracé des diagrammes d'effort tranchant et de moment de flexion (• figure 13)

- **Calcul des réactions:**

- équilibre des moments en B

$$R_A \times 6 = 12 \text{ kN} \times 4 \Rightarrow R_A = 8 \text{ kN}$$

- équilibre des forces verticales

$$R_A + R_B = 12 \text{ kN} \Rightarrow R_B = 4 \text{ kN}$$

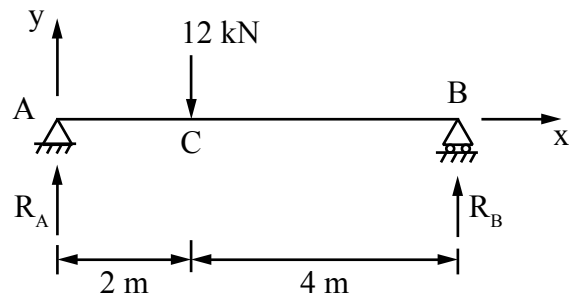


Figure 13: Structure étudiée

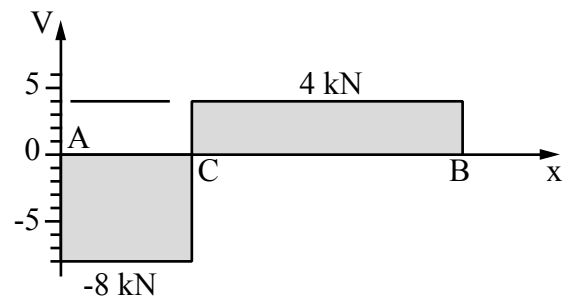
- **Valeurs de l'effort tranchant:**

- entre les sections C et B:

$$V = R_B = 4 \text{ kN}$$

- entre les sections A et C:

$$\begin{aligned} V &= R_B - 12 \text{ kN} \\ &= -8 \text{ kN} \end{aligned}$$



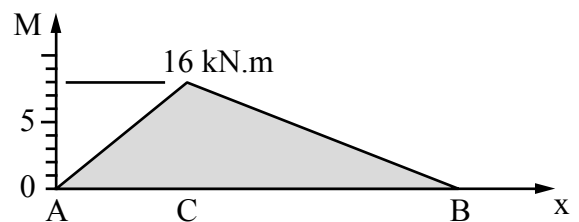
- **Valeurs du moment de flexion dans une section d'abscisse x:**

- entre les sections C et B ($2 \text{ m} < x < 6 \text{ m}$):

$$\begin{aligned} M &= R_B(6 - x) \\ &= 4(6 - x) \end{aligned}$$

- entre les sections A et C ($0 < x < 2 \text{ m}$):

$$\begin{aligned} M &= R_B(6 - x) - 12(2 - x) \\ &= 4(6 - x) - 12(2 - x) \\ &= 8x \end{aligned}$$



En particulier

en A :	$M = 0$	$(x = 0)$
en B :	$M = 0$	$(x = 6 \text{ m})$
en C :	$M = 16 \text{ kN.m}$	$(x = 2 \text{ m})$

Le moment est bien maximum dans la section où l'effort tranchant est nul (section C).

Entre les sections A et C de même qu'entre les sections C et B il n'y a pas de charge extérieure ou d'appui, aussi l'effort tranchant est constant et le moment de flexion varie linéairement entre ces sections.

Exemple 2: Tracé des diagrammes d'effort tranchant et de moment de flexion (• figure 14)

- Calcul des réactions

- charge verticale totale:

$$P = 10 \times 6 = 60 \text{ kN}$$

- par raison de symétrie, on a:

$$R_A = R_B = \frac{P}{2} = 30 \text{ kN}$$

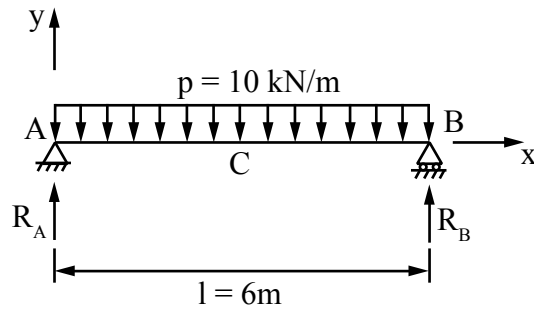
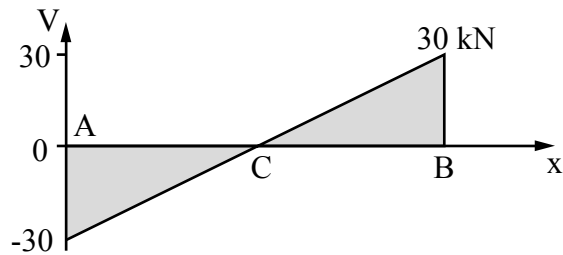


Figure 14: Structure étudiée

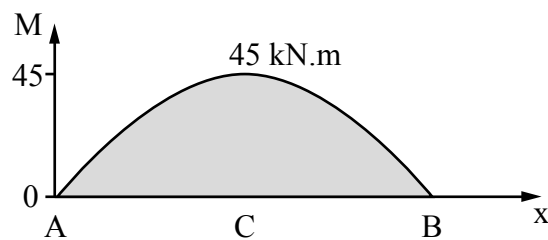
- Valeurs de l'effort tranchant

$$\begin{aligned} V &= R_B - p(\ell - x) \\ &= 30 - 10(6 - x) \\ &= -30 + 10x \end{aligned}$$



- Valeurs du moment de flexion

$$\begin{aligned} M &= R_B(\ell - x) - p(\ell - x) \frac{(\ell - x)}{2} \\ &= 30(6 - x) - 10 \frac{(6 - x)^2}{2} \\ &= -5x^2 + 30x \end{aligned}$$



Valeurs particulières:

En A	$(x = 0)$:	$V = -30 \text{ kN}$	$M = 0$
En B	$(x = 6 \text{ m})$:	$V = +30 \text{ kN}$	$M = 0$
En C	$(x = 3 \text{ m})$:	$V = 0$	$M = -5 \times 3^2 + 30 \times 3$ $= + 45 \text{ kN.m}$ (moment maxi)

4. ISOSTATICITÉ ET HYPERSTATICITÉ DES STRUCTURES

Une structure à barres soumise à des charges données est isostatique quand on peut, en appliquant uniquement les équations d'équilibre, déterminer les valeurs des réactions d'appui et des sollicitations dans toutes les sections. Dans le cas contraire, la structure est hyperstatique et le degré d'hyperstaticité est égal au nombre de réactions d'appui et de sollicitations dans les sections qu'il faudrait connaître pour pouvoir, par les seules équations d'équilibre, déterminer toutes les autres réactions d'appuis et sollicitations dans les sections.

Exemple 1: Poutre continue sur 3 appuis (• figure 15)

- nombre de réactions: 4 (R_A, R'_A, R_B, R_C)
- nombre d'équations d'équilibre: 3
 - équilibre des forces verticales
 - équilibre des forces horizontales
 - équilibre des moments par rapport à un point
- structure hyperstatique de degré $4 - 3 = 1$

Donc, si on connaît la valeur de l'une des réactions d'appui R_A, R_B ou R_C , on peut par les équations d'équilibre déterminer les valeurs des 3 autres réactions, puis calculer les sollicitations dans toutes les sections.

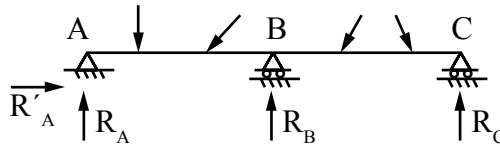


Figure 15

Exemple 2: Poutre encastree aux 2 extremités (• figure 16)

- nombre de réactions inconnues: 6
- nombre d'équations d'équilibre: 3
- degré d'hyperstaticité: $6 - 3 = 3$

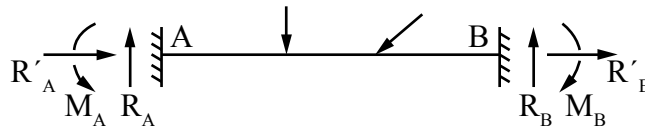


Figure 16

Exemple 3: Arc à 2 articulations (• figure 17)

- nombre de réactions inconnues: 4
- nombre d'équations d'équilibre: 3
- degré d'hyperstaticité: $4 - 3 = 1$

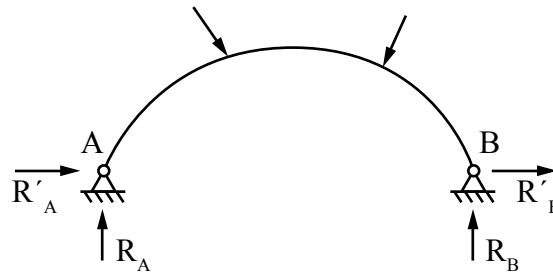


Figure 17

Chaque articulation située à l'intérieur d'une structure (en dehors des appuis) vient réduire de 1 le degré d'hyperstaticité de la structure, puisque mettre une articulation dans une section revient à fixer la valeur du moment dans cette section ($M = 0$).

Exemple 4: Arc à 3 articulations (• figure 18)

S'il n'y avait pas d'articulation au faîtage de la structure, le degré d'hyperstaticité serait de 1 comme dans l'exemple 3.

Compte tenu de l'articulation, le degré d'hyperstaticité devient:

$$1 - 1 = 0$$

La structure est isostatique.

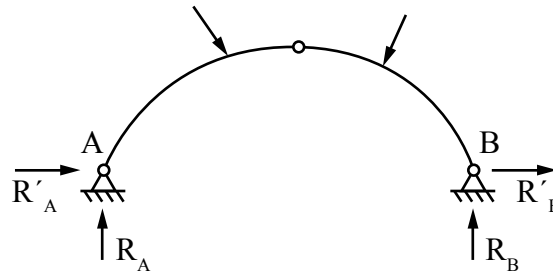


Figure 18

Exemple 5: Portique simple articulé en pieds (• figure 19)

- nombre de réactions inconnues: 4
- nombre d'équations d'équilibre: 3
- degré d'hyperstaticité: $4 - 3 = 1$

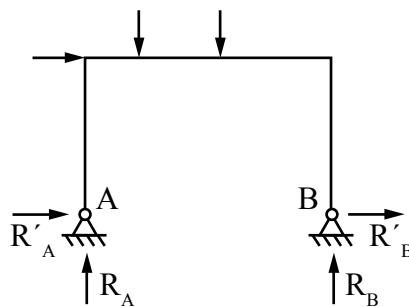


Figure 19

Exemple 6: Portique double articulé en pieds (• figure 20)

- nombre de réactions inconnues: 6
- nombre d'équations d'équilibre: 3
- degré d'hyperstaticité: $6 - 3 = 3$

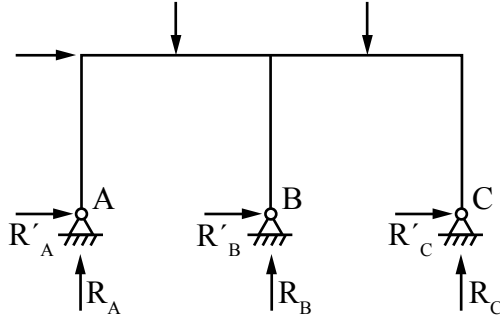


Figure 20

Exemple 7: Portique multi-étagé (• figure 21)

- nombre de réactions inconnues: 4
- nombre d'équations d'équilibre: 3

Il faudrait fixer la valeur d'une réaction pour pouvoir calculer les 3 autres par les équations d'équilibre.

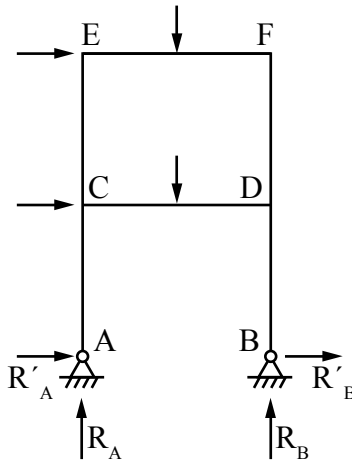


Figure 21

Mais lorsque l'on connaît les valeurs des 4 réactions, on ne peut toujours pas calculer les sollicitations dans toutes les sections car il y a une boucle fermée de barres dans la structure (boucle C, E, F, D). Il faudrait couper une barre telle que la barre CD, en une section, ou connaître les 3 sollicitations (N , V et M) dans une section de cette barre CD pour pouvoir, de proche en proche, calculer les sollicitations dans toutes les sections. Le degré d'hyperstaticité de la structure est égal à $1 + 3 = 4$ (si on connaît la valeur d'une réaction et des 3 sollicitations dans une section de la barre CD, on peut par les équations d'équilibre déterminer toutes les autres réactions d'appuis et sollicitations).

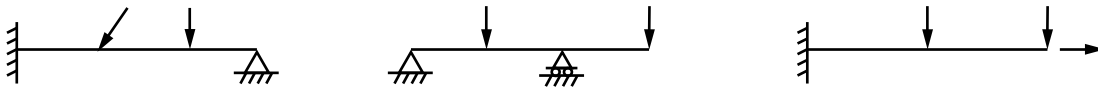
Si une structure est isostatique, on peut sans difficulté déterminer par des calculs manuels les sollicitations dans les sections de barres, sollicitations qui ne dépendent que des charges, des appuis et des longueurs et positions des barres. Connaissant ces sollicitations, on choisit les caractéristiques de sections afin que la résistance de chaque barre soit suffisante.

Si une structure est hyperstatique, on doit se fixer a priori les valeurs des caractéristiques de sections, car les sollicitations vont dépendre de ces caractéristiques, ainsi que des charges, appuis, longueurs et positions des barres. On calcule alors les sollicitations, ce qui est beaucoup plus long et complexe

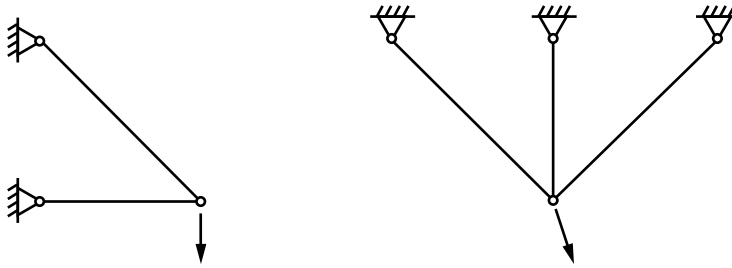
que pour une structure isostatique, et est donc généralement réalisé par ordinateur. On regarde alors si les caractéristiques de sections choisies a priori conviennent. Dans la négative, on modifie ces caractéristiques et on calcule de nouveau les sollicitations, qui ont changé car elles dépendent des caractéristiques des sections.

5. EXERCICES

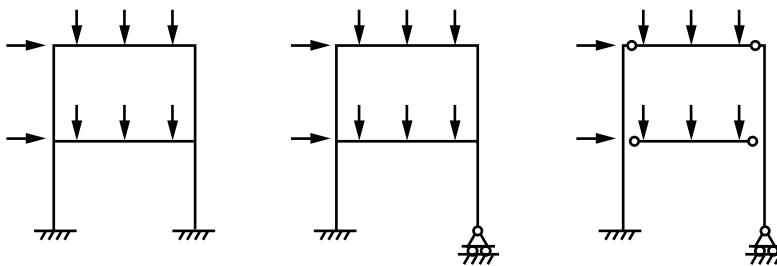
1- Déterminer le degré d'hyperstaticité des structures suivantes :



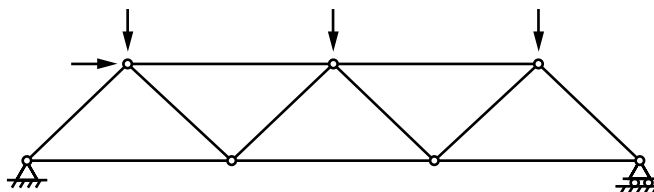
2- Déterminer le degré d'hyperstaticité des structures suivantes :



3- Déterminer le degré d'hyperstaticité des structures suivantes :

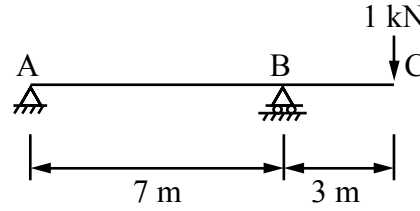


4- Déterminer le degré d'hyperstaticité de la structure suivante :

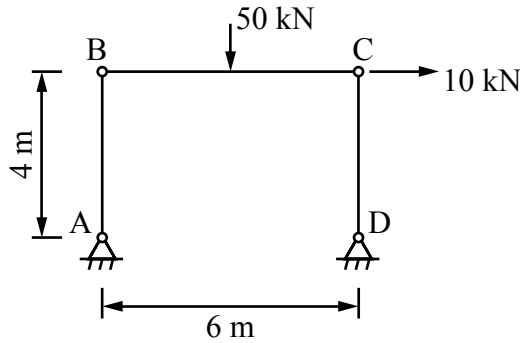


Chapitre 4: Sollicitation dans une section

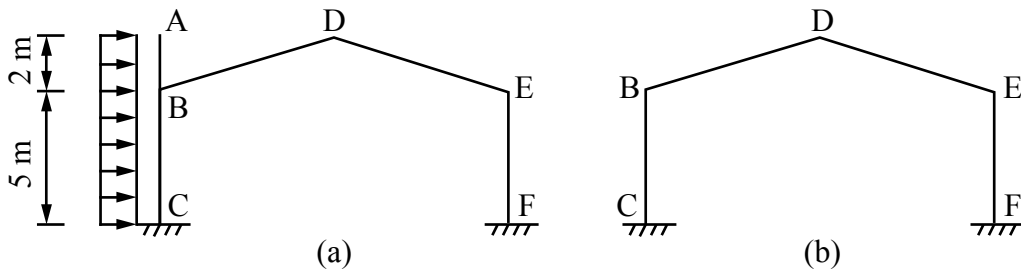
5- Tracer les diagrammes d'effort tranchant et de moment de flexion pour cette structure soumise à ce chargement



6- Déterminer le degré d'hyperstaticité, calculer les réactions et tracer les diagrammes d'effort normal, d'effort tranchant et de moment de flexion pour cette structure soumise à ce chargement.

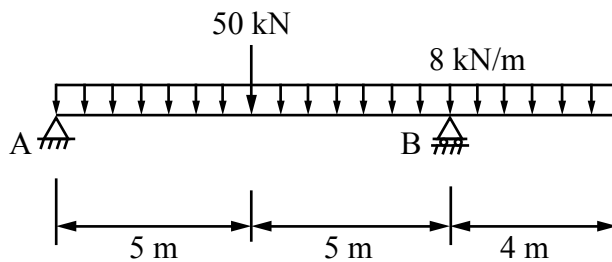


7- Quelles charges faut-il appliquer au portique b pour que les efforts dans les barres CB, BD, DE et EF soient les mêmes que dans les barres correspondantes du portique a?



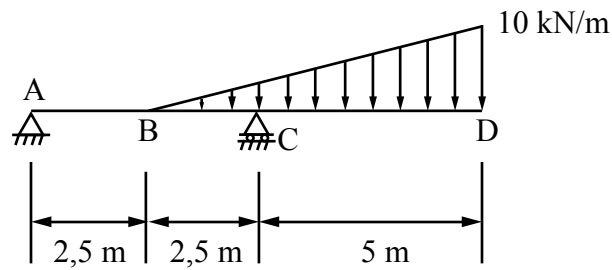
8- Pour la structure et le chargement représentés ci-dessous:

- calculer les réactions aux appuis,
- tracer le diagramme d'effort tranchant,
- rechercher la valeur maximale du moment de flexion,

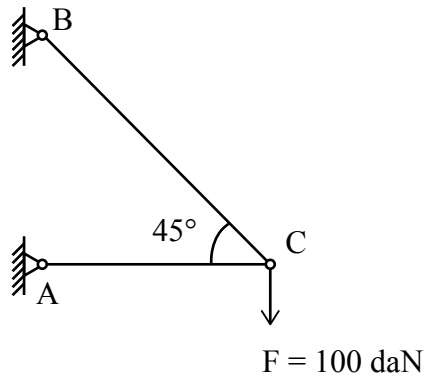


9- Pour la structure et le chargement représentés ci-dessous :

- calculer les réactions aux appuis,
- rechercher la section où l'effort tranchant s'annule,
- rechercher la valeur maximale du moment de flexion,



10- Pour la structure et le chargement représentés ci-dessous, déterminer les efforts dans les barres et les réactions d'appui.



5 Notion de contrainte

1. DÉFINITION D'UNE CONTRAINTE

Considérons, en un point O à l'intérieur d'un corps en équilibre sous certaines charges, un petit élément de surface plane, d'aire dA (• *figure 1*). Sur chacune des deux facettes de cette surface agit une petite force, qui est un effort interne transmis à cette surface par la matière environnante. Les deux forces, appliquées de part et d'autre de l'élément de surface dA , sont opposées puisque cet élément est en équilibre.

Soit \vec{df} le vecteur représentant la force agissant d'un côté de cette surface. Cette force n'est pas nécessairement perpendiculaire à l'élément. Par définition, le vecteur contrainte agissant sur la surface est donné par :

$$\vec{c} = \frac{\vec{df}}{dA}$$

Une contrainte est une force par unité de surface et est donc exprimée en daN/mm^2 ou en MPa ($1 \text{ MPa} = 0,1 \text{ daN/mm}^2 = 1 \text{ N/mm}^2$)

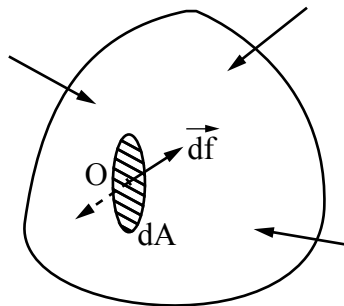


Figure 1: Petite surface dans solide

2. CONTRAINTES NORMALES, CONTRAINTES DE CISAILLEMENT

On considère encore notre petit élément plan, d'aire dA , sur lequel le vecteur contrainte est \vec{c} . Ce vecteur contrainte a même direction que la petite force \vec{df} qui agit sur l'élément.

On peut décomposer le vecteur contrainte \vec{c} en ses composantes dirigées (• *figure 2*):

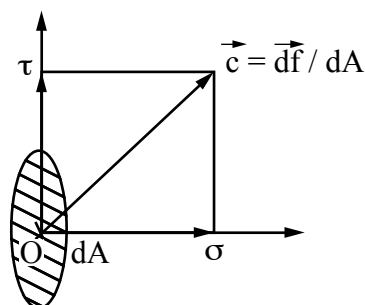


Figure 2 : Contraintes

- perpendiculairement à l'élément de surface : on obtient la contrainte normale, notée σ et considérée comme positive en cas de traction
- dans le plan de l'élément de surface : on obtient la contrainte de cisaillement, parfois appelée contrainte tangentielle, et notée τ .

Si au même point O du même corps soumis aux mêmes charges, on envisage un élément de surface plane d'orientation différente, le vecteur contrainte \vec{c} ainsi que les contraintes normales σ et de cisaillement τ sont différentes

Les contraintes normales et de cisaillement sont exprimées en daN/mm² ou en MPa.

3. RELATIONS ENTRE CONTRAINTES ET SOLLICITATIONS

Considérons le cas particulier d'une section de barre : sur chaque petit élément d'aire dA de la section transversale, la partie de barre située à droite de la section (S) exerce une petite force $d\vec{f}$ (• figure 3). L'ensemble de ces forces $d\vec{f}$, transportées au centre de gravité G de la section, a pour résultantes l'effort normal (ou effort axial), l'effort tranchant et le moment de flexion dans la section.

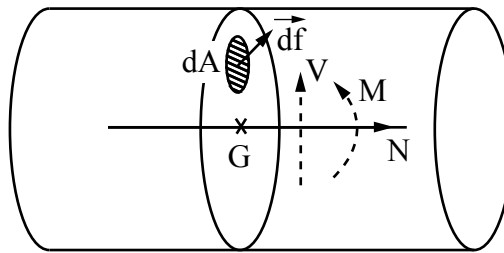


Figure 3 : Section transversale de poutre

Le vecteur contrainte $\vec{c} = \frac{d\vec{f}}{dA}$ peut encore être décomposé en une contrainte normale et une contrainte de cisaillement.

Toutes les contraintes normales sont dirigées, par définition, perpendiculairement à la section droite. La petite force qui agit sur l'élément d'aire dA , perpendiculairement à la section droite, a pour valeur $\sigma \cdot dA$. Lorsqu'on fait la somme, pour tous les éléments de surface dA constituant la section droite, des $\sigma \cdot dA$, on obtient l'effort normal N dans la section (• figure 4).

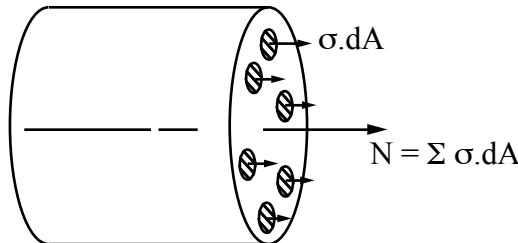


Figure 4 : Effort normal dans la section

De même, c'est l'ensemble des contraintes de cisaillement qui conduisent à l'effort tranchant. La petite force qui agit sur l'élément d'aire dA , dans le plan de la section droite et dans le plan de chargement, a pour valeur $\tau \cdot dA$. Lorsqu'on fait la somme, pour tous les éléments de surface dA constituant la section droite, des $\tau \cdot dA$, on obtient l'effort tranchant V dans la section (• figure 5).

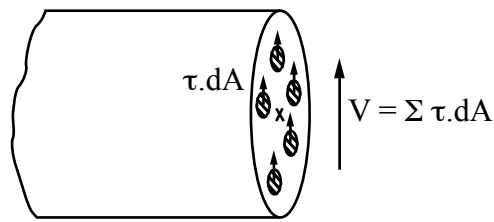


Figure 5 : Effort tranchant dans la section

Enfin le moment de flexion par rapport à l'axe $y'y$ passant par le centre de gravité de la section est dû aux contraintes normales: sur l'élément dA situé à la distance z de cet axe, agissent les forces $\sigma.dA$ et $\tau.dA$. Le moment dû à ces deux forces est (• figure 6):

$$\begin{aligned} dM_y &= \sigma.dA.z + \tau.dA.0 \\ &= \sigma.dA.z \end{aligned}$$

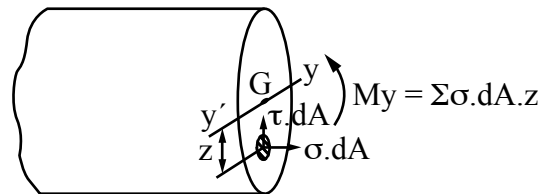
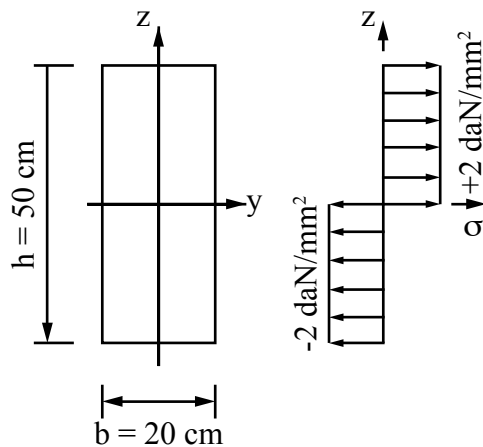


Figure 6 : Moment de flexion dans la section

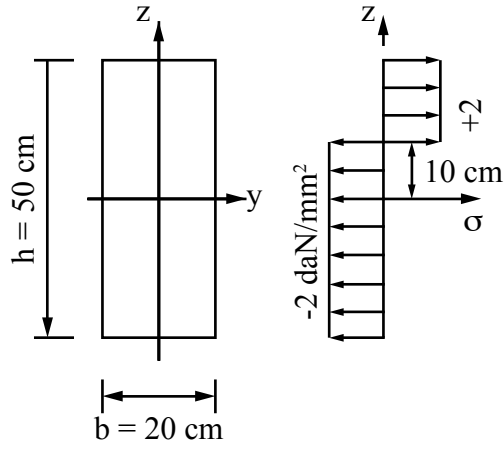
Lorsqu'on fait la somme, pour tous les éléments de surface dA constituant la section droite, des $\sigma.dA.z$, on obtient le moment de flexion M_y dans la section.

4. EXERCICES

1- Calculer l'effort normal et le moment de flexion dans cette section rectangulaire soumise à ces contraintes normales.



2- Calculer l'effort normal et le moment de flexion dans cette section rectangulaire soumise à ces contraintes normales.



6 Comportement et caractéristiques des matériaux

1. INTRODUCTION

Les relations de comportement sont les relations qui permettent de calculer les déformations ou déplacements d'un élément de structure en fonction des contraintes ou sollicitations qui s'exercent sur cet élément.

Une déformation provoquée par une action agissant sur une structure est élastique quand elle est réversible, ce qui veut dire que la déformation disparaît lorsque l'action est supprimée.

Les relations de comportement d'un matériau sont déterminées à partir d'essais.

Les caractéristiques des matériaux qui nous intéressent sont les caractéristiques physiques (masse volumique...) et les caractéristiques mécaniques (contrainte limite d'élasticité, module d'élasticité...).

2. LE MATÉRIAU ACIER

2.1. Essai de traction (norme EN 10002-1)

Considérons une éprouvette en acier courant S 235 (• *figure 1*). On trace deux repères sur cette éprouvette, séparés par une distance L . Entre ces deux repères, l'éprouvette est de section constante A .

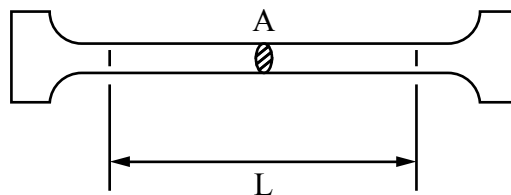


Figure 1: Éprouvette pour essai de traction

On place les deux têtes de cette éprouvette dans les mâchoires d'une machine d'essai qui exerce une force de traction N à chaque extrémité de l'éprouvette. Cette force augmente lentement, en partant de la valeur nulle. On mesure à chaque instant la distance entre les 2 repères tracés sur l'éprouvette. Cette distance, qui était L en l'absence de traction, augmente progressivement en fonction de la force appliquée. Une force de traction N provoque une augmentation ΔL de la distance entre repères.

On détermine à chaque instant :

- la contrainte de traction dans la section courante d'éprouvette, donnée par $\sigma = N/A$
- l'allongement par unité de longueur de l'éprouvette, donné par $\varepsilon = \Delta L/L$

On trace la courbe représentant les résultats d'essai : on reporte en abscisse l'allongement relatif $\varepsilon = \Delta L/L$ et en ordonnée la contrainte σ . Avec l'acier courant S 235, cette courbe a l'allure représentée à la *figure 2* :

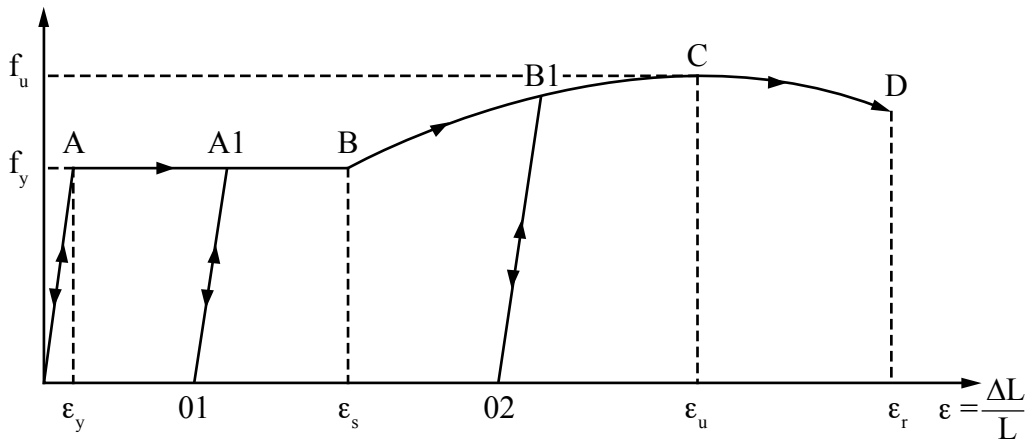


Figure 2 : Allure de la courbe contrainte-déformation de l'acier S 235

On distingue quatre phases dans cet essai de traction.

a) phase élastique OA

L'effort de traction augmente. La contrainte σ croît de 0 à f_y . Sur la courbe contrainte-déformation (• figure 2), le point représentatif se déplace de O jusqu'à A.

Entre O et A, le comportement est élastique, c'est-à-dire réversible: si on supprime l'effort de traction, la distance entre repères redevient égale à L, distance initiale. Il n'y a pas de déformation permanente. Au cours du chargement, on se déplace de O à A et au cours du déchargement, on suit le trajet inverse, de A à O.

Dans cette phase, la déformation ε est proportionnelle à la contrainte σ . Le segment OA est rectiligne. On peut écrire :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{ou} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon \quad (\text{loi de Hooke})$$

E est une constante, appelée module d'élasticité longitudinale ou module d'Young, dont la valeur est 21 000 daN/mm² pour tous les aciers, et environ 7 000 daN/mm² pour l'aluminium et ses alliages.

On a
$$\sigma = \frac{N}{A} = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

d'où
$$\Delta L = N \frac{L}{EA}$$

Lorsqu'on atteint le point A, on quitte le domaine élastique. En A, la contrainte est égale à la contrainte limite d'élasticité, notée f_y , dont la valeur minimale garantie est, pour les pièces en acier S 235 d'épaisseur de paroi ne dépassant pas 16 mm : 23,5 daN/mm².

La déformation limite élastique, notée ε_y , est égale à 0,11% pour l'acier S 235. Ainsi, une barre en acier S 235 de longueur 1 mètre, soumise à un effort de traction, quitte le domaine élastique lorsque la traction produit un allongement total de la barre égal à 1,1 mm.

Le matériau acier présente en compression un comportement identique à celui en traction. En particulier la contrainte limite d'élasticité f_y et le module d'élasticité longitudinale E sont les mêmes.

b) palier plastique AB

À partir du point A, on entre dans le domaine plastique. Entre A et B, l'allongement se produit sous contrainte sensiblement constante : c'est le palier plastique.

Le comportement n'est plus réversible. Si, après avoir atteint un point A1 situé entre A et B (• *figure 2*), on diminue l'effort de traction jusqu'à l'annuler, le point représentatif se déplace de A1 à O1. Le segment A1 O1 est rectiligne et parallèle à AO. En fin de déchargement subsiste une déformation permanente, représentée par la longueur O O1 égale à A A1. Les déformations se produisant entre A et B sont des déformations plastiques.

Il en est ainsi jusqu'au point B. Avec l'acier S 235 la déformation totale ε_s , lorsqu'on atteint le point B, est d'environ 1,4 %, ce qui représente plus de 12 fois la déformation limite élastique, soit pour une barre de 1 mètre un allongement total d'environ 14 mm.

c) phase d'écroutissage BC

Pour obtenir un allongement supplémentaire lorsqu'on est au point B, il faut augmenter l'effort de traction et donc la contrainte σ . Il y a un raffermissement du matériau : c'est l'écroutissage.

Les déformations se produisant dans cette phase de chargement sont constituées en partie de déformations élastiques, c'est-à-dire réversibles, et en partie de déformations plastiques, c'est-à-dire irréversibles.

Si lorsqu'on est en un point B1 quelconque situé entre BC, on diminue l'effort de traction jusqu'à l'annuler, on suit le trajet B1 O2 rectiligne et parallèle à OA.

La contrainte au point C, appelée contrainte maximale ou résistance à la traction, est notée f_u . Sa valeur pour l'acier S 235 est d'environ 36 daN/mm², soit 1,5 fois la contrainte limite d'élasticité f_y .

d) phase de striction CD

À partir du point C, un étranglement, une striction, se produit dans une zone localisée de l'éprouvette (• *figure 3*). Dans cette zone, l'aire de la section transversale de l'éprouvette diminue fortement et des déformations longitudinales importantes se développent.



Figure 3 : Striction

Sur la *figure 2*, la courbe est descendante entre C et D. La contrainte reportée en ordonnée a été obtenue en divisant l'effort de traction par la section initiale A de l'éprouvette. Si on reportait en ordonnée la contrainte dans la zone subissant la striction, contrainte calculée en divisant l'effort de traction par la section minimale réelle dans cette zone, on obtiendrait entre C et D une courbe légèrement croissante.

En D se produit la rupture de l'éprouvette, rupture située dans la zone ayant subi la striction. L'éprouvette est séparée en deux parties. La déformation ε_r à la rupture est d'environ 26 % pour l'acier S 235, ce qui conduit à un allongement total de 260 mm pour une barre de 1 mètre.

Un matériau est ductile lorsqu'il est apte à subir des déformations plastiques importantes avant rupture. La plupart des aciers et en particulier l'acier S 235 sont très ductiles. Le béton et le verre le sont beaucoup moins.

2.2. Caractéristiques des aciers

Certaines caractéristiques sont identiques pour tous les aciers. C'est le cas en particulier de la masse volumique et du module d'élasticité longitudinale. D'autres caractéristiques dépendent de la composition chimique de l'acier et des traitements thermiques ou mécaniques qu'il a subis. C'est le cas en particulier de la contrainte limite d'élasticité, de l'allongement à la rupture et de la résilience (qui sera définie en 2.4.2.).

2.3. Caractéristiques physiques

- masse volumique : 7850 kg/m^3
- température de fusion : environ $1500 \text{ }^\circ\text{C}$
- coefficient de dilatation thermique : $\alpha = 11 \times 10^{-6}$

Une barre de longueur L soumise à une élévation de température ΔT s'allonge d'une valeur ΔL donnée par : $\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$

Ainsi une barre de 1 mètre soumise à une variation de température de 27° et libre de se dilater subit une variation de longueur totale de 0,3 mm. En effet :

$$\Delta L = 11 \times 10^{-6} \times 27 \times 1000 = 0,3 \text{ mm}$$

2.4. Caractéristiques mécaniques (norme NF EN 10025)

Un acier de construction est défini par :

- sa « nuance », déterminée par l'essai de traction,
- sa « qualité », déterminée par l'essai de résilience,
- son aptitude au pliage, déterminée par les essais de pliage à froid,
- sa dureté, déterminée par l'essai Brinell, l'essai Vickers ou l'essai Rockwell.

2.4.1. Nuances d'acier

La « nuance » d'un acier caractérise la contrainte limite d'élasticité en traction (ou compression) f_y , la résistance à la traction f_u , et l'allongement rémanent A par unité de longueur après rupture de cet acier. Ces valeurs, pour une même nuance d'acier, varient légèrement selon l'épaisseur t de la pièce.

Les tôles et barres laminées en acier existent en 6 nuances, celles les plus utilisées étant les nuances S 235, S 275 et S 355. On donne dans le tableau 1 pour les épaisseurs de parois courantes (ne dépassant pas 40 mm), les valeurs minimales garanties de la contrainte limite d'élasticité f_y , de l'allongement à la rupture $A\%$ et la fourchette de variation de la résistance à la traction f_u .

Nuance		S 235	S 275	S 355
$f_{y \text{ min}}$ (daN/mm ²)	$t \leq 16 \text{ mm}$	23,5	27,5	35,5
	$16 < t \leq 40$	22,5	26,5	34,5
f_u (daN/mm ²)		34 - 47	41 - 56	49 - 63
À (%)		26	22	22

Tableau 1 : Caractéristiques des aciers

La contrainte limite d'élasticité en cisaillement pur τ_y est prise égale à la contrainte limite d'élasticité

en traction pure f_y divisée par $\sqrt{3}$:

$$\tau_y = \frac{f_y}{\sqrt{3}} \quad (\text{pour l'acier S 235 : } \tau_y = 13,57 \text{ daN/mm}^2)$$

Lorsque sur un élément de surface agissent simultanément une contrainte normale σ et une contrainte de cisaillement τ , cet élément reste dans le domaine élastique si ces contraintes vérifient :

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq f_y \quad (\text{critère de Von Mises})$$

2.4.2. Qualités d'acier

Une même nuance d'acier peut exister en plusieurs qualités différentes suivant le degré de fragilité correspondant.

Un matériau est plus ou moins fragile suivant qu'il casse plus ou moins facilement sous l'effet d'un choc. Ainsi, le verre est fragile. Les ruptures fragiles interviennent sans apparition de déformations plastiques.

La fragilité est caractérisée par la valeur de la résilience, déterminée lors d'un essai normalisé : l'essai de flexion par choc (norme EN 10045-1). On évalue la résilience par l'énergie absorbée pour rompre d'un seul coup une éprouvette normalisée présentant une entaille pratiquée pour faciliter la cassure (• figure 4). Plus la valeur de la résilience est élevée, moins le matériau est fragile.

L'essai se fait à l'aide d'un mouton pendule Charpy (• figure 5). L'éprouvette est rompue sous l'effet du choc d'une masse pendulaire: on relève le pendule d'un certain angle α par rapport à sa position d'équilibre; on lâche le pendule, qui prend une certaine vitesse, rompt l'éprouvette, et remonte d'un angle β après rupture. La différence $(\alpha - \beta)$ permet de calculer l'énergie W dépensée pour la rupture de l'éprouvette. En effet, s'il n'y avait pas d'éprouvette à rompre, le pendule remonterait à une position symétrique de la position de départ, et on aurait $(\alpha - \beta) = 0$

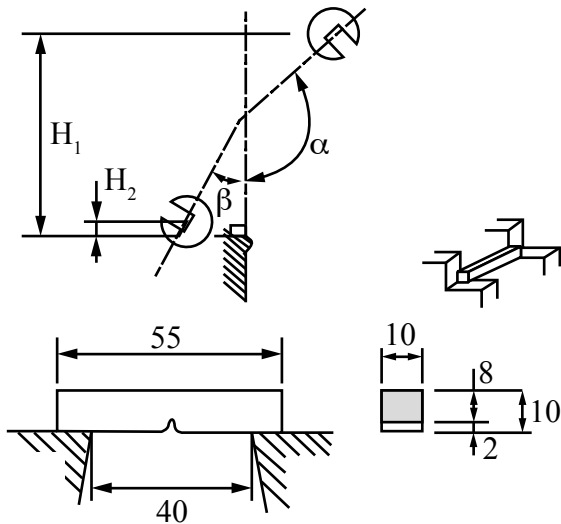


Figure 4 : Essai de résilience

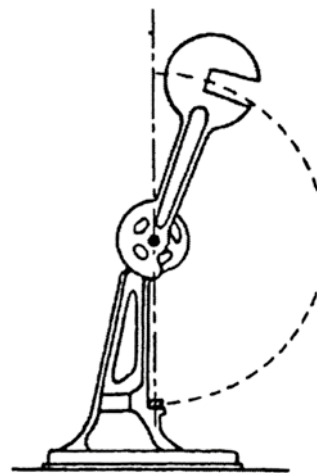


Figure 5 : Mouton pendule Charpy

Lorsqu'on divise cette énergie W par la section nette A de l'éprouvette au droit de l'entaille, on obtient la résilience K en da J/cm^2 .

$$K (\text{daJ/cm}^2) = \frac{W (\text{daJ})}{A (\text{cm}^2)}$$

Les matériaux deviennent plus fragiles à basse température, aussi la résilience est-elle déterminée pour des températures particulières (+ 20 °C, 0 °C, - 20 °C,...).

Certains facteurs ont pour effet de rendre l'acier plus fragile: l'écrouissage, c'est-à-dire les déformations

plastiques subies par l'élément, le soudage en particulier de pièces épaisses, et les basses températures. Le choix d'une qualité pour un élément en acier doit se faire en fonction des conditions d'utilisation de cet élément.

2.4.3. Aptitude au pliage

Cette aptitude est déterminée par un essai normalisé (Norme NF EN ISO 7438).

L'éprouvette en acier est placée sur deux appuis parallèles et est fléchie sous l'action d'un mandrin ou d'un dégorgeoir agissant en son milieu (• *figure 6*). On poursuit l'essai jusqu'à ce que les deux branches de l'éprouvette fassent entre elles un angle déterminé, pouvant atteindre 180 ° (branches parallèles).

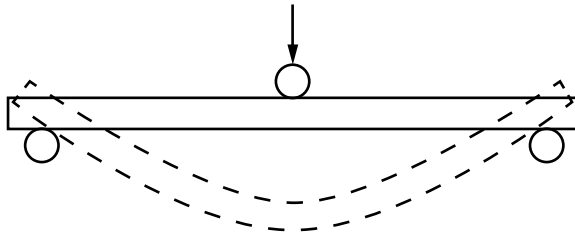


Figure 6 : Essai de pliage

Après pliage, on examine les tranches et la face externe de la partie pliée, pour détecter d'éventuelles fissures.

2.4.4. Dureté

La dureté est définie à partir d'essais au cours desquels on mesure la déformation permanente en surface du métal sous l'effet de la pression d'un pénétrateur. Ce pénétrateur s'enfonce un peu dans le métal, laissant une empreinte que l'on mesure.

Le pénétrateur est une bille en acier ou en carbure de tungstène dans l'essai de dureté Brinell (norme NF EN ISO 6506), un diamant en forme de pyramide à base canée dans l'essai Vickers (norme NF EN ISO 6508) et une bille en acier ou un cône en diamant dans l'essai Rockwell (norme NF EN ISO 6507).

La connaissance de la dureté d'une pièce en acier est utile lorsque cette pièce doit être sujette à des phénomènes tels que l'usure, l'usinage,...

Il existe des tables de conversion permettant d'évaluer la résistance à la traction de l'acier à partir de sa dureté Brinell, Vickers ou Rockwell.

3. LE MATÉRIAU BÉTON

Nous n'envisageons ici que le cas de bétons constitués de granulats naturels normaux, avec un dosage en ciment au moins égal à 300 kg par m³ de béton mis en œuvre.

3.1. Caractéristiques physiques

La masse volumique du béton sans armatures est de 2200 kg/m³, celle du béton armé est de 2500 kg/m³. Ainsi le poids propre d'une dalle en béton armé est de 25 daN/m² par cm d'épaisseur.

Le coefficient de dilatation thermique α est très proche de celui de l'acier, ce qui est favorable pour l'association des deux matériaux : il varie entre $7 \cdot 10^{-6}$ et $12 \cdot 10^{-6}$ suivant les bétons.

3.2. Caractéristiques mécaniques

3.2.1. Résistance du béton

Un béton est défini par sa classe «C» égale à la valeur en MPa = N/mm² de sa résistance à la compression à l'âge de 28 jours, appelée résistance caractéristique et notée f_{ck} . Les bétons les plus couramment utilisés sont de classes C25, C30, C35 ou C40.

Pour un béton dont l'âge est de j jours, différent de 28, la résistance caractéristique $f_{ck(t)}$ est obtenue selon l'Eurocode 4 et son Annexe Nationale par :

$$f_{ck}(t) = f_{cm}(t) - 8(\text{MPa}) \text{ pour } 3 < t < 28 \text{ jours} \quad \text{et} \quad f_{ck}(t) = f_{ck} \text{ pour } t > 28 \text{ jours.}$$

f_{cm} est la résistance moyenne en compression du béton à 28 jours donnée par le tableau 2 page suivante, $f_{cm(t)}$ est sa résistance moyenne à l'âge t donnée par la formule :

$$f_{cm}(t) = e^{s \left[1 - \sqrt{\frac{28}{t}} \right]} f_{cm}, \text{ dans cette formule } t \text{ est exprimé en jour, et } s \text{ varie entre } 0,20 \text{ et } 0,38 \text{ suivant la classe de ciment utilisé. Pour des ciments normaux « classe CEM 42,5N » couramment utilisés, } s \text{ vaut } 0,25.$$

La résistance à la compression est mesurée par compression axiale de cylindres droits de révolution de diamètre 150 mm et 300 mm de hauteur (anciennes éprouvettes de 160 x 320 mm tolérées) par application de la norme EN 206-1-CN.

Pour tenir compte de la dispersion existant dans la résistance du béton et d'éventuels défauts localisés, on applique un coefficient de sécurité sur la résistance caractéristique afin d'obtenir la résistance de calcul. Dans les cas courants et sous des combinaisons de charges autres qu'accidentelles, la contrainte de compression limite à l'état ultime, f_{cd} , est obtenue par :

$$f_{cd} = \frac{\alpha_{cc} \cdot f_{ck}}{\gamma_c} \text{ avec: } \gamma_c \text{ le coefficient partiel de sécurité pour le béton que l'on prend égal à } 1,5 \text{ et } \alpha_{cc}$$

un coefficient tenant compte de l'évolution à long terme du béton. Ce coefficient varie entre 0,8 et 1. Pour les bétons courants, l'Eurocode 2 recommande de prendre : $\alpha_{cc} = 1,0$.

La résistance du béton à la traction est en général négligée dans les calculs. Si elle doit être considérée, on détermine la résistance caractéristique à la traction à 28 jours, notée f_{ctk} et exprimé en MPa (N/mm²).

3.2.2. Diagramme contrainte-déformation

Le diagramme idéalisé que l'on peut utiliser pour relier la déformation longitudinale d'un élément en béton à la contrainte de compression est composé d'un arc de parabole suivi d'un segment de droite (• figure 7).

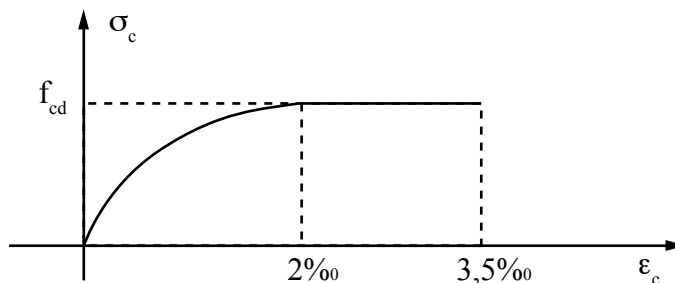


Figure 7 : Courbe idéalisée contrainte-déformation du béton

Sous des mises en charges normales d'une durée d'application inférieure à 24 heures, le module d'élasticité longitudinale E_{cm} dû à la déformation instantanée du béton est égal aux valeurs données dans le tableau 2, fonction de la classe de béton. Pour des mises en charges de durées importantes le béton flue et les déformations augmentent.

Les déformations différées du béton comprennent le retrait (diminution du volume provoquée par l'élimination de l'eau excédentaire) et le fluage (lente déformation irréversible sous l'effet des charges).

Les deux phénomènes s'additionnent dans le cas habituel de béton soumis à compression.

On admet que sous contraintes de longue durée d'application, les déformations longitudinales complémentaires dues au fluage du béton sont le double de celles qui se produisent instantanément. La déformation finale totale est donc égale à trois fois la déformation instantanée.

Le coefficient d'équivalence n , égal au rapport entre les modules d'élasticité longitudinale de l'acier et du béton, varie d'environ 7 pour les actions de courte durée à environ 21 pour les actions de longue durée. Une valeur moyenne de 15 est souvent adoptée.

On considère que le raccourcissement unitaire dû au retrait dans les pièces massives à l'air libre est de :

- 3. 10^{-4} dans le quart sud-est de la France et les climats tempérés secs
- 2. 10^{-4} dans le reste de la France et les climats humides
- 5. 10^{-4} dans les climats très secs, les déserts
- 4. 10^{-4} dans les climats chauds et secs
- 1,5. 10^{-4} dans les climats très humides

À défaut de mesures spécifiques, pour les bétons ordinaires, la résistance caractéristique à la compression (f_{ck}), la résistance moyenne de compression à 28 jours (f_{cm}), la résistance caractéristique à la traction à 28 jours (f_{ctk}) et le module d'élasticité sont donnés dans le tableau 2 ci-dessous.

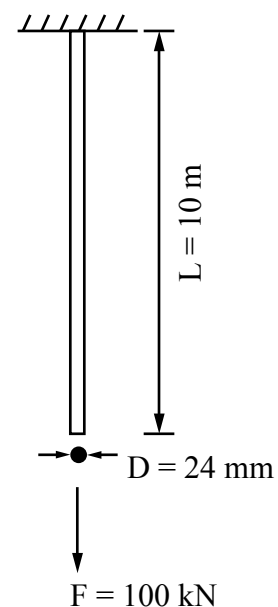
Classe de résistance du béton	C20	C25	C30	C35	C40
f_{ck} (MPa)	20	25	30	35	40
f_{cm} (MPa)	28	33	38	43	48
F_{ctk} (MPa)	1,5	1,8	2,0	2,2	2,5
E_{cm} (MPa)	30 000	31 000	33 000	34 000	35 000

Tableau 2 : Caractéristiques de résistance mécanique du béton (unités : MPa = N/mm²)

4. EXERCICE

On applique à l'extrémité d'une suspente de 10 m de long, à section circulaire pleine de 24 mm de diamètre, en acier S 235, une force de 100 kN.

- 1) Calculer la contrainte dans les sections.
- 2) Calculer l'allongement de la suspente sous l'effet de cette force.
- 3) Calculer l'allongement de la suspente sous l'effet d'une augmentation de température de 30 °C.
- 4) Le dimensionnement de la suspente est-il admissible, sachant que l'allongement total permis est de 15 mm ?



7 Caractéristiques géométriques des sections

1. INTRODUCTION

Les caractéristiques géométriques d'une section de barre peuvent être déterminées par le calcul en fonction des dimensions de la section. Pour les profilés laminés standards, ces caractéristiques sont données dans les catalogues. Elles sont nécessaires pour le calcul des sollicitations dans les barres, des contraintes dans les sections et des déformations, flèches, variations de longueurs...

Le dimensionnement d'un élément de structure peut se résumer à la question suivante : « Connaissant les limites en résistance de sections, en instabilités et en déplacements, quelle est la section minimale nécessaire, de manière à répondre au problème ou, en d'autres mots, comment choisir la section qui soit à la fois économique et qui place en sécurité ».

2. AIRE D'UNE SECTION

L'aire de la section droite d'une barre est la somme de ses aires élémentaires. L'aire de la section est exprimée en mm^2 , cm^2 ,...

Pour une section particulière telle que le I présenté à la figure 1, on a :

$$A = b_1 t_{f1} + b_2 t_{f2} + t_w h_w$$

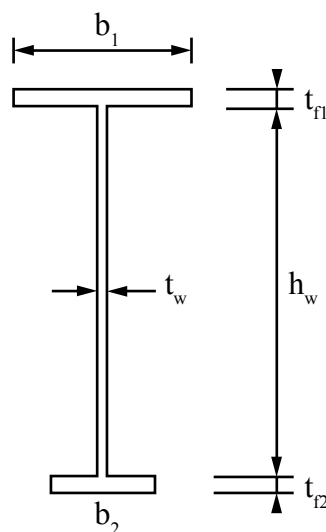


Figure 1 : Aire de la section droite

EXEMPLE :

Calculons l'aire de la section d'un IPE 200 et comparons le résultat à celui donné dans les catalogues.

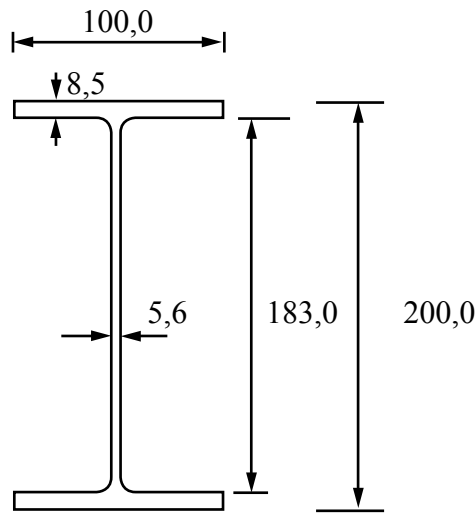


Figure 2 : Section IPE 200

Semelle supérieure : largeur 100 mm

épaisseur 8,5 mm

Âme : hauteur 183 mm

épaisseur 5,6 mm

Semelle inférieure : largeur 100 mm

épaisseur 8,5 mm

Section du profil : $A = 100 \times 8,5 + 183 \times 5,6 + 100 \times 8,5$
 $= 2725 \text{ mm}^2 = 27,25 \text{ cm}^2$

Cette valeur diffère légèrement de celle donnée dans les catalogues, qui est de $28,5 \text{ cm}^2$. Ce faible écart provient du fait que les congés de raccordement entre semelles et âme, ainsi que les arrondis aux extrémités des semelles sont pris en compte dans les valeurs données par les catalogues. Le résultat fourni par le calcul approché diffère de moins de 5 % de la valeur réelle et place en sécurité.

3. MOMENT STATIQUE

3.1. Définition

Le moment statique S d'une section par rapport à un axe est égal au produit de l'aire de la section par la distance entre son centre de gravité G et l'axe.

$$S_{aa'} = Ad$$

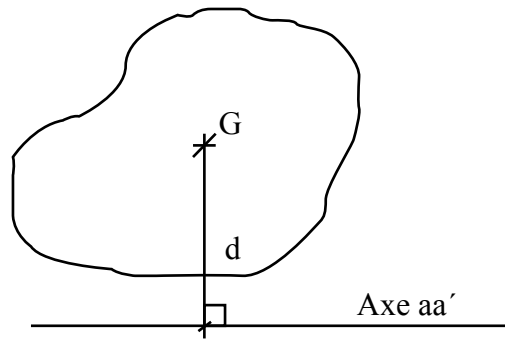


Figure 3 : Moment statique S

La valeur de la distance d sera positive si G est situé d'un côté de l'axe aa' et négative s'il est situé de l'autre côté.

Le moment statique est exprimé en mm³, cm³,...

Le moment statique est toujours calculé par rapport à un axe défini. Un moment statique donné sans référence à un axe n'a aucun sens et n'est pas utilisable. L'axe « aa' » peut être quelconque : horizontal, vertical ou oblique comme présenté sur la figure 4.

Pour la section représentée à la figure 4, A₁ est l'aire de la semelle supérieure, A₂ est l'aire de l'âme, A₃ est l'aire de la semelle inférieure. Les moments statiques par rapport aux axes h, y et o ont pour expression :

$$S_h = A_1 d_{1,h} + A_2 d_{2,h} + A_3 d_{3,h}$$

$$S_v = A_1 d_{1,v} + A_2 d_{2,v} + A_3 d_{3,v}$$

$$S_o = A_1 d_{1,o} + A_2 d_{2,o} + A_3 d_{3,o}$$

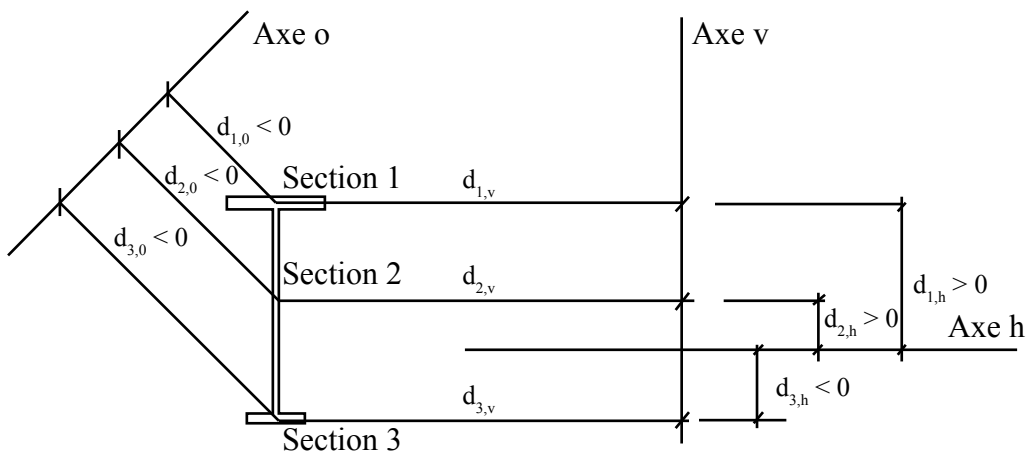


Figure 4 : Moment statique par rapport à divers axes

3.2. Propriétés

Le moment statique $S_{aa'}$ d'une section par rapport à un axe aa' est égal au moment statique de la section par rapport à l'axe bb' parallèle à aa' augmenté du produit de l'aire de la section par la distance entre les deux axes (• figure 5).

$$S_{aa'} = S_{bb'} + A(a - b) \text{ où } (a - b) \text{ est positif ou négatif}$$

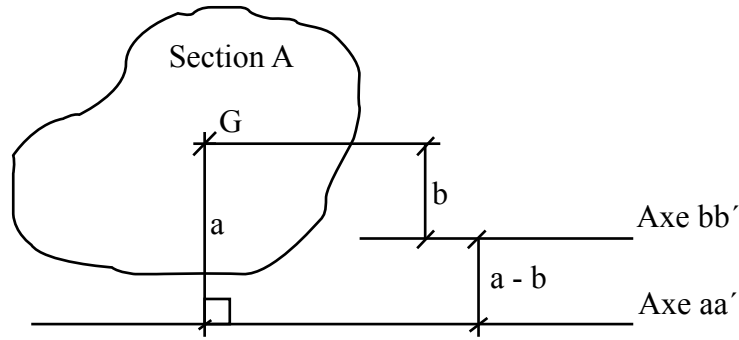


Figure 5 : Changement d'axe

Le moment statique d'une section composée de plusieurs sections élémentaires est égal à la somme algébrique des moments statiques des sections élémentaires.

Le moment statique par rapport à l'axe aa' sur la figure 6 est égal à :

$$S_{aa'} = b_1 t_{f1} d_1 + b_2 t_{f2} d_2 + h_w t_w d_w$$

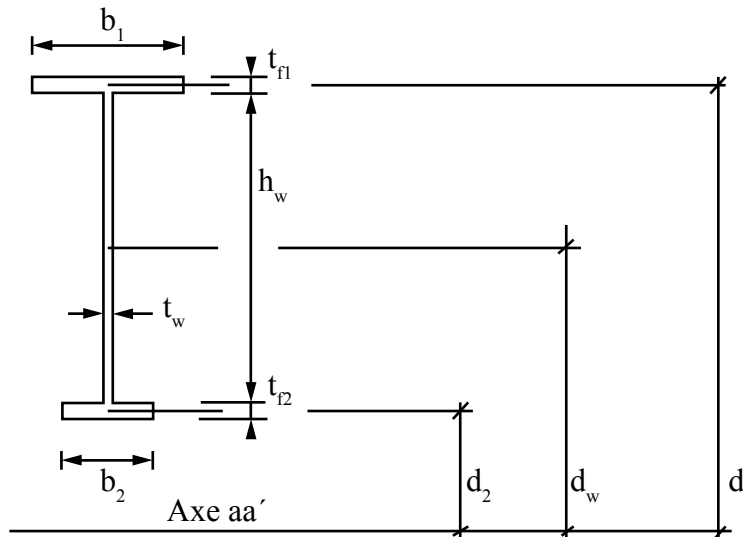


Figure 6 : Section composée

où d_1, d_2, d_w , sont les distances des centres de gravité des éléments à l'axe aa'. Elles sont prises positives si le centre de gravité de l'élément de surface se trouve au-dessus de l'axe, et négatives dans le cas contraire. Les aires sont toujours positives.

Le moment statique par rapport à un axe d'une section creuse peut être déterminé en calculant le moment statique par rapport à cet axe de la section pleine et en lui soustrayant le moment statique de la partie vide. Sur la figure 7, le moment statique par rapport à l'axe YY' est :

$$S_{YY'} = h b d - h' b' d'$$

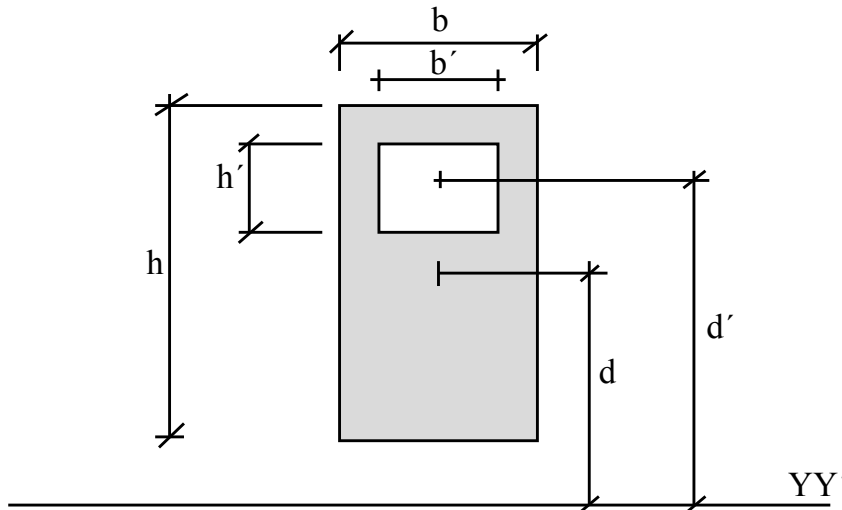


Figure 7: Moment statique d'une section creuse

où: d est la distance entre le centre de gravité du rectangle de côtés b et h et l'axe YY' ,
 d' est la distance entre le centre de gravité du rectangle de côtés b' et h' et l'axe YY' .

4. CENTRE DE GRAVITÉ

4.1. Définition

Le centre de gravité G d'une section est le point tel que le moment statique de la section par rapport à n'importe quel axe passant par ce point est nul. La figure 8 donne la position du centre de gravité pour quelques sections courantes.

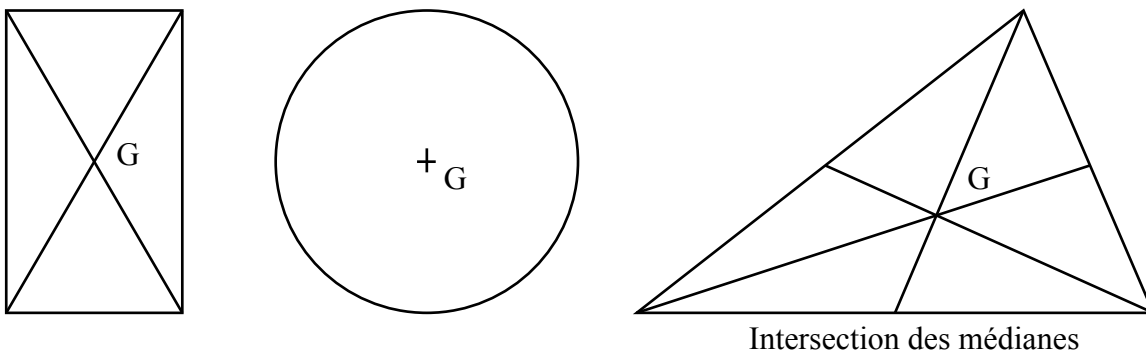


Figure 8: Centre de gravité de quelques sections courantes

4.2. Propriétés

Si la section possède un axe de symétrie, le centre de gravité G est situé sur cet axe.

Si la section présente deux axes de symétrie, le centre de gravité G est situé à l'intersection de ces deux axes.

4.3. Recherche du centre de gravité

Les définitions et propriétés énumérées précédemment permettent de calculer la position du centre de gravité G d'une section en procédant comme suit (• figure 9) :

- 1) Utiliser les symétries éventuelles de la section. Le centre de gravité se trouve sur le ou les axes de symétrie et sa position peut être déterminée très rapidement.
- 2) À défaut d'axes de symétrie :
 - Choisir un axe de référence, de préférence passant par un des bords de la section (toutes les distances seront ainsi positives comme avec l'axe Y à la figure 9) et calculer le moment statique S de la section par rapport à cet axe :

$$S_Y = A_1 d_1 + A_2 d_2 + A_3 d_3$$

- Calculer l'aire totale de la section :

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

- Utiliser la propriété du moment statique: $S_Y = Z_G A$ d'où $Z_G = \frac{S_Y}{A}$

Si nécessaire, effectuer la même opération par rapport à l'axe vertical Z, on aura: $Y_G = \frac{S_Z}{A}$

Le centre de gravité G de la section a pour coordonnées Y_G et Z_G .

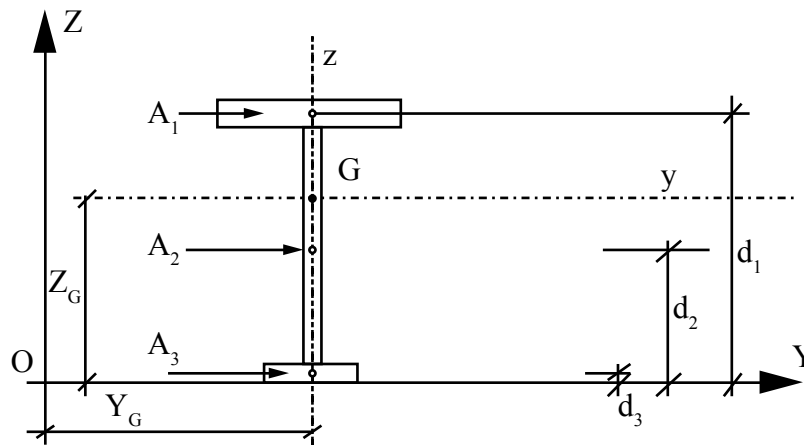


Figure 9 : Calcul de la position du centre de gravité G

5. MODULE DE RÉSISTANCE PLASTIQUE DES SECTIONS SYMÉTRIQUES

5.1. Définition

Le module de résistance plastique W_{pl} par rapport à l'axe de symétrie d'une section est égal à la somme des valeurs absolues des moments statiques des aires situées de part et d'autre de cet axe.

Le module de résistance plastique d'une section symétrique vaut donc deux fois le moment statique de la demi-section située d'un côté de l'axe: $W_{pl} = 2 S$.

Les modules de résistance plastique sont exprimés en mm^3 , cm^3 ,...

5.2. Propriétés

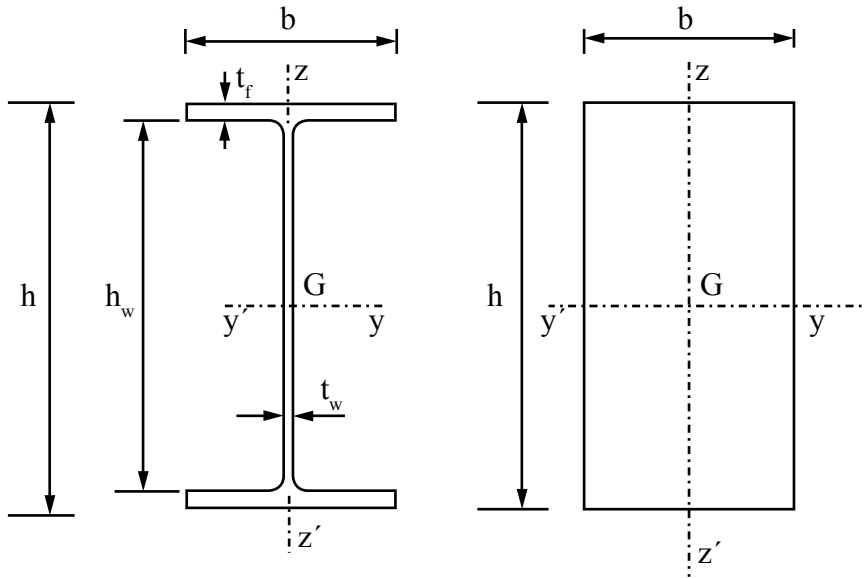


Figure 10 : Section I symétrique et section rectangulaire

Pour une section rectangulaire (• figure 10), les modules de résistance plastique valent respectivement :

$$W_{pl,y} = \frac{bh^2}{4} \quad \text{et} \quad W_{pl,z} = \frac{b^2h}{4}$$

Pour un profil en I symétrique (• figure 10), les modules de résistance plastique $W_{pl,y}$ et $W_{pl,z}$ peuvent être approchés, en négligeant les congés de raccordement, par les formules suivantes :

$$W_{pl,y} = \frac{t_w h^2}{4} + (b - t_w)(h - t_f)t_f \quad W_{pl,z} = \frac{b^2 t_f}{2} + \frac{(h - 2t_f)}{4} t_w^2$$

5.3. Exemple

Calculons le moment statique de la demi-section supérieure d'un IPE 200 par rapport à l'axe horizontal passant par G et comparons le résultat obtenu à la valeur du catalogue ConstruirAcier :

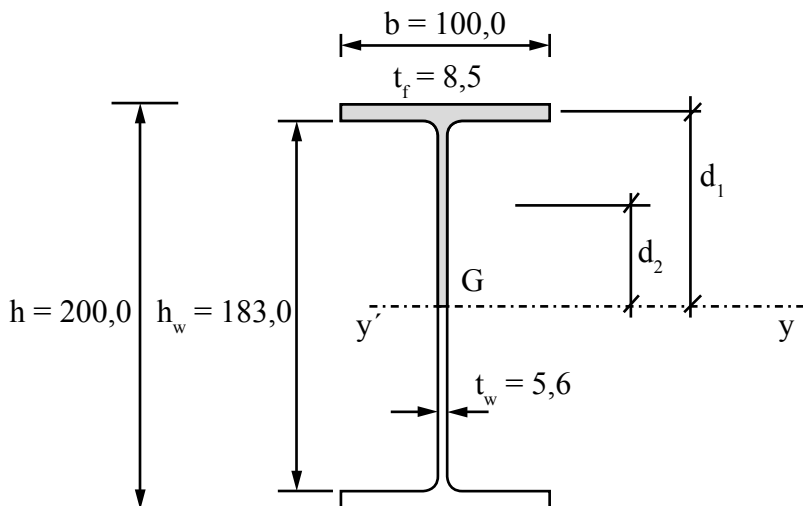


Figure 11 : Moment statique - IPE 200

On a :

$$S_y = bt_f d_1 + \frac{h_w}{2} t_w d_2 = (100,0 \times 8,5 \times d_1) + (183,0/2,0) \times 5,6 \times d_2$$

$$d_1 = \frac{h_w}{2} + \frac{t_f}{2} = (183 + 8,5)/2 = 95,75 \text{ mm}$$

$$d_2 = \frac{h_w}{4} = \frac{183}{4} = 45,75 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} S_y &= 100 \times 8,5 \times 95,75 + 91,5 \times 5,6 \times 45,75 \\ &= 104\,834 \text{ mm}^3 = 105 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Dans le catalogue ConstruirAcier : $W_{pl,y} = 220,6 \text{ cm}^3$, donc $S_y = 0,5 W_{pl,y} = 110,3 \text{ cm}^3$.

La différence de 5 % provient des congés de raccordement négligés dans notre calcul.

6. MOMENT D'INERTIE

6.1. Définition

Le moment d'inertie (ou inertie) d'une surface infiniment petite par rapport à un axe éloigné de cette surface est égal au produit de son aire par le carré de la distance à l'axe (• *figure 12*). Il est toujours positif et s'exprime en mm^4 , cm^4 ,

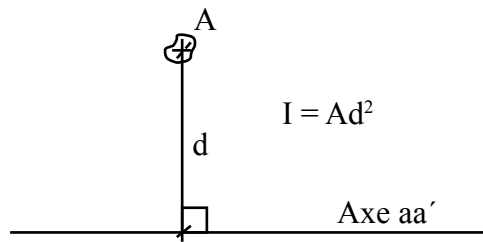


Figure 12 : Moment d'inertie d'une surface infiniment petite

6.2. Propriétés

a) Le moment d'inertie d'une section rectangulaire de largeur b et de hauteur h , par rapport à l'axe y parallèle à la largeur et passant par son centre de gravité G , est égal à :

$$I_y = \frac{bh^3}{12} \quad (\bullet \text{ figure 13})$$

Le moment d'inertie d'une section circulaire de diamètre D , par rapport à un axe passant par son centre, est égal à :

$$I = \frac{\pi D^4}{64} \quad (\bullet \text{ figure 13})$$

- b) Le moment d'inertie d'une section par rapport à un axe Y quelconque est égal au moment d'inertie de la section par rapport à l'axe y passant par son centre de gravité et parallèle à Y augmenté du produit de l'aire de la section par le carré de la distance entre les deux axes.

$$I_Y = I_y + Ad_y^2 \quad (\text{Théorème de Huygens})$$

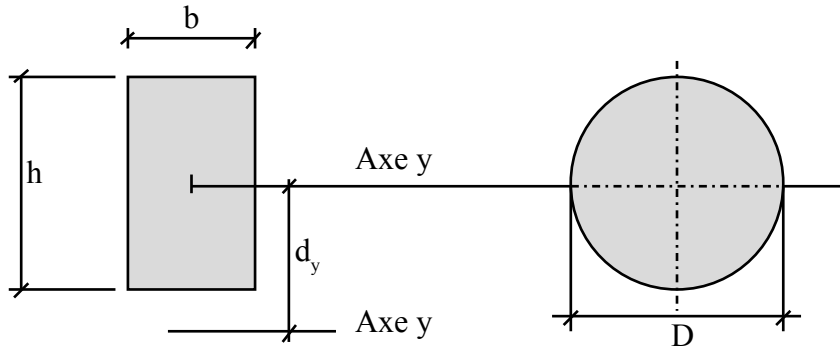


Figure 13: Moment d'inertie

- c) Le moment d'inertie I par rapport à un axe d'une section composée de plusieurs sections élémentaires est égal à la somme des moments d'inertie de chacune des sections élémentaires par rapport à cet axe.

Ainsi pour la section représentée à la figure 14, on a :

$$I_{yy'} = \frac{b_1 t_{f1}^3}{12} + b_1 t_{f1} d_1^2 + \frac{t_w h_w^3}{12}$$

$$+ h_w t_w d_w^2 + \frac{b_2 t_{f2}^3}{12} + b_2 t_{f2} d_2^2$$

$$I_{zz'} = \frac{t_{f1} b_1^3}{12} + \frac{t_{f2} b_2^3}{12} + \frac{t_w^3 h_w}{12}$$

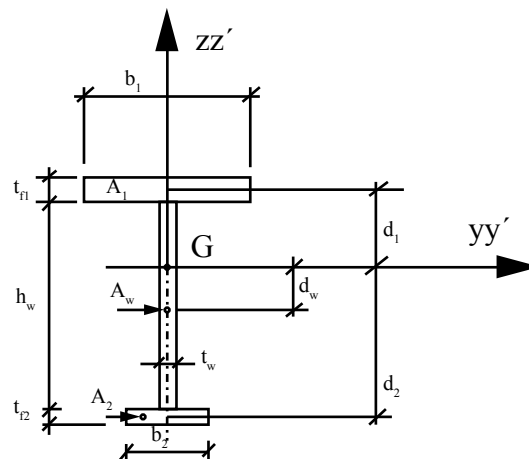


Figure 14: Moment d'inertie

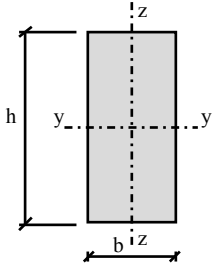
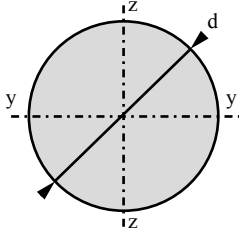
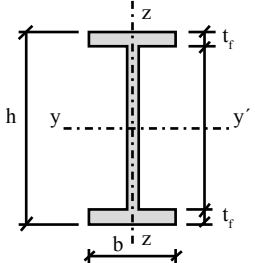
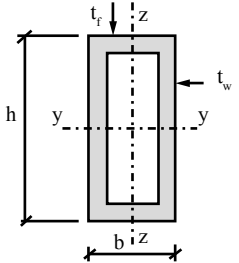
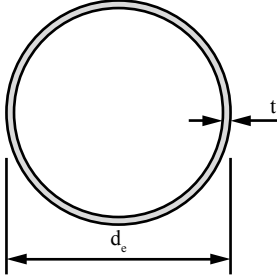
	$A = bh$ $I_y = \frac{bh^3}{12}$ $I_z = \frac{hb^3}{12}$
	$A = \frac{\pi d^2}{4}$ $I_y = \frac{\pi d^4}{64}$ $I_z = \frac{\pi d^4}{64}$
	$A = ht_w + 2(b - t_w)t_f$ $I_y = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b - t_w)}{12}(h - 2t_f)^3$ $I_z = \frac{t_f b^3}{6} + (h - 2t_f) \frac{t_w^3}{12}$
	$A = 2ht_w + 2(b - 2t_w)t_f$ $I_y = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b - 2t_w)}{12}(h - 2t_f)^3$ $I_z = \frac{hb^3}{12} - \frac{(h - 2t_f)}{12}(b - 2t_w)^3$
	$d_i = d_e - 2t$ $A = \pi \frac{d_e^2}{4} - \pi \frac{d_i^2}{4}$ $I = \pi \frac{d_e^4}{64} - \pi \frac{d_i^4}{64}$

Figure 15 : Valeurs d'aires et de moments d'inertie de sections courantes

Remarques

- Parmi tous les axes parallèles à une direction donnée, c'est celui passant par le centre de gravité qui conduit à l'inertie minimale.
- Parmi tous les axes passant par le centre de gravité d'une section, il existe deux axes perpendiculaires tels que l'un donne le moment d'inertie maximal et l'autre le moment d'inertie minimal. Ces deux axes sont appelés axes principaux. Le ou les axes de symétrie éventuels de la section sont axes principaux.

6.3. Exemple

Calculons les moments d'inertie I_y et I_z d'un IPE 200, par rapport aux axes principaux y et z (• figure 16)

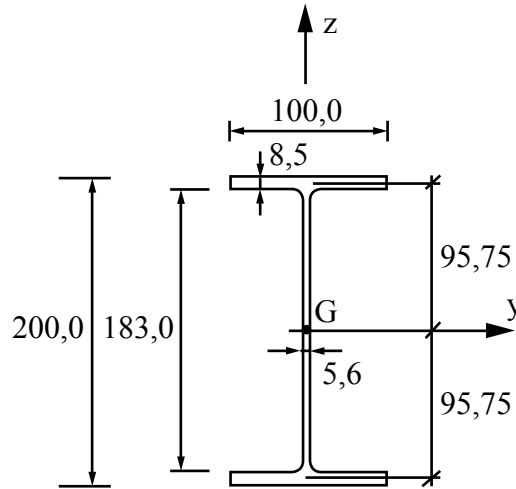


Figure 16: Section IPE 200

En négligeant les congés de raccordement, on a:

$$I_y = \frac{100 \times 8,5^3}{12} + 100 \times 8,5 \times 95,75^2 + \frac{5,6 \times 183^3}{12} + \frac{100 \times 8,5^3}{12} + 100 \times 8,5 \times 95,75^2$$

ou, en considérant que la section I est obtenue en retirant de la section rectangulaire enveloppe deux sections rectangulaires correspondant aux vides, de part et d'autre de l'âme:

$$I_y = 100 \times \frac{200^3}{12} - (100 - 5,6) \frac{183^3}{12}$$

$$= 18\,455\,902 \text{ mm}^4 \cong 1\,846 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{100^3 \times 8,5}{12} + \frac{5,6^3 \times 183}{12} + \frac{8,5 \times 100^3}{12} = 1\,419\,345 \text{ mm}^4 = 142 \text{ cm}^4$$

La valeur I_y diffère quelque peu de celle donnée dans les catalogues ($I_y = 1\,943 \text{ cm}^4$). Cet écart est dû aux congés de raccordement.

7. MODULE DE RÉSISTANCE ÉLASTIQUE

7.1. Définition

Le module de résistance élastique W_{el} d'une section par rapport à un de ses axes principaux est obtenu en divisant le moment d'inertie I par rapport à cet axe, par la distance entre cet axe et la fibre extrême de la section (• figure 17).

$$W_{el,y} = \frac{I_y}{v_z} \qquad W_{el,z} = \frac{I_z}{v_y}$$

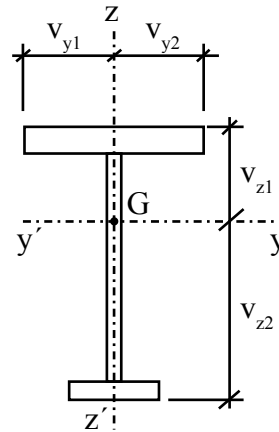


Figure 17 : Module de résistance élastique

Le module de résistance élastique est exprimé en mm^3 , cm^3 ,...

Cette grandeur est utilisée pour la détermination des contraintes maximales dans une section à comportement élastique (• voir chapitre 8).

Les valeurs des modules de résistance élastique des profils standards sont données dans les catalogues. Elles peuvent aussi être déterminées par le calcul.

7.2. Exemple

Pour le profilé IPE 200, on a calculé en 6.3 :

$$I_y = 1\,846 \text{ cm}^4 \text{ et } I_z = 142 \text{ cm}^4$$

$$\text{par ailleurs; } v_z = \frac{h}{2} = 10,0 \text{ cm et } v_y = \frac{b}{2} = 5,0 \text{ cm}$$

$$\text{d'où: } W_{el,y} = \frac{I_y}{v_z} = \frac{1\,846}{10} = 184,6 \text{ cm}^3 \quad W_{el,z} = \frac{I_z}{v_y} = \frac{142}{5} = 28,4 \text{ cm}^3$$

Les valeurs fournies par les catalogues, sont respectivement :

$$W_{el,y} = 194,3 \text{ cm}^3 \text{ et } W_{el,z} = 28,46 \text{ cm}^3$$

8. RAYON DE GIRATION

8.1. Définition

Les rayons de giration d'une section par rapport à ses axes principaux sont définis par les formules :

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

Les rayons de giration sont exprimés en mm, cm,...

Le rayon de giration est utilisé pour vérifier les barres comprimées. C'est une image de la distribution de la matière de part et d'autre d'un axe principal. Plus la matière est éloignée de cet axe, plus l'inertie I et le rayon de giration i sont élevés.

8.2. Exemple

Considérons les deux sections représentées à la figure 18 : une section pleine et une section creuse dont les aires sont presque identiques.

Nous allons calculer les inerties et les rayons de giration et les comparer.

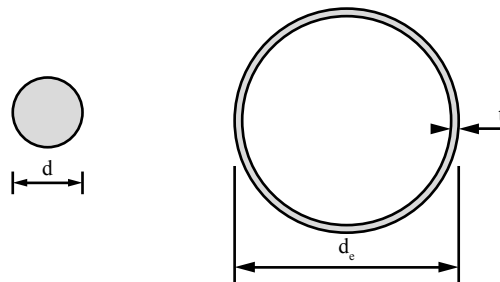


Figure 18 : sections étudiées

Pour la section pleine de diamètre $d = 110 \text{ mm}$, on a :

$$A = \pi \frac{d^2}{4} = \pi \frac{110^2}{4} = 9503 \text{ mm}^2$$

$$I = \pi \frac{d^4}{64} = \pi \frac{110^4}{64} = 7186884 \text{ mm}^4$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{\pi d^2}{4}}} = \frac{d}{4} = 27,5 \text{ mm}$$

Pour la section creuse de diamètre extérieur $d_e = 324 \text{ mm}$ et d'épaisseur $t = 9,5 \text{ mm}$, on a :

$$A = \pi \frac{d_e^2}{4} - \pi \frac{d_i^2}{4} = \pi \frac{324^2}{4} - \pi \frac{305^2}{4} = 9386 \text{ mm}^2$$

$$I = \pi \frac{d_e^4}{64} - \pi \frac{d_i^4}{64} = \pi \frac{324^4}{64} - \pi \frac{305^4}{64} = 116155968 \text{ mm}^4 = 11615 \text{ cm}^4$$

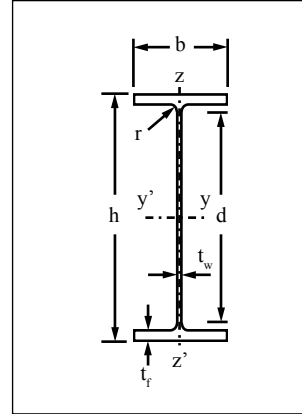
$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{116155968}{9386}} = 111 \text{ mm}$$

Une section creuse est mieux adaptée pour résister à une compression qu'une section pleine.

9. UTILISATION DES CATALOGUES

Des catalogues fournissent les caractéristiques des profilés métalliques standards. Le tableau 1 présente la copie d'une page du catalogue ConstruirAcier. On y trouve toutes les caractéristiques principales du produit.

IPE



Profils	Masse M kg/m	Dimensions						Aire de la section	Surface de peinture	
		h mm	b mm	t _w mm	t _f mm	r mm	d mm	A cm ²	m ² /m	m ² /t
IPE A 300	36,5	297,0	150	6,1	9,2	15	248,6	46,5	1,156	31,65
IPE 300	42,2	300,0	150	7,1	10,7	15	248,6	53,8	1,160	27,46
IPE O 300	49,3	304,0	152	8,0	12,7	15	248,6	62,8	1,174	23,81
IPE A 330	43,0	327,0	160	6,5	10,0	18	271,0	54,7	1,250	29,09
IPE 330	49,1	330,0	160	7,5	11,5	18	271,0	62,6	1,25	25,52
IPE O 330	57,0	334,0	162	8,5	13,5	18	271,0	72,6	1,268	22,25
IPE A 360	50,2	357,6	170	6,6	11,5	18	298,6	64,0	1,351	26,91
IPE 360	57,1	360,0	170	8,0	12,7	18	298,6	72,7	1,353	23,70
IPE O 360	66,0	364,0	172	9,2	14,7	18	298,6	84,1	1,367	20,69
IPE A 400	57,4	397,0	180	7,0	12,0	21	331,0	73,1	1,464	25,51
IPE 400	66,3	400,0	180	8,6	13,5	21	331,0	84,5	1,467	22,12
IPE O 400	75,7	404,0	182	9,7	15,5	21	331,0	96,4	1,481	19,57

Profils	Valeurs statiques											
	I_y cm ⁴	$X_{el,y}$ cm ³	$W_{pl,y}$ cm ³	i_y cm	A_{vz} cm ²	I_z cm ⁴	$W_{el,z}$ cm ³	$W_{pl,z}$ cm ³	i_z cm	A_{vy} cm ²	I_t cm ⁴	$I_w \times 10^{-3}$ cm ⁶
IPE A 300	7 173,5	483,1	541,8	12,42	22,2	518,93	69,19	107,3	3,34	28,9	13,43	107,16
IPE 300	8 356,1	557,1	628,4	12,46	25,7	603,62	80,48	125,2	3,35	33,7	20,12	125,93
IPE O 300	9 994,2	657,5	743,8	12,61	29,0	745,44	98,08	152,6	3,44	40,4	31,06	157,69
IPE A 330	10 230,8	625,7	701,9	13,67	27,0	685,21	85,65	133,3	3,54	33,6	19,57	171,50
IPE 330	11 766,9	713,1	804,3	13,71	30,8	788,00	98,50	153,7	3,55	38,7	28,15	199,10
IPE O 330	13 910,4	833,0	942,8	13,84	34,9	960,03	118,52	185,0	3,64	46,0	42,15	245,65
IPE A 360	14 515,5	811,8	906,8	15,06	29,8	944,30	111,09	171,9	3,84	40,7	26,51	281,99
IPE 360	16 265,6	903,6	1 019,1	14,95	35,1	1 043,20	122,73	191,1	3,79	45,3	37,32	313,58
IPE O 360	19 047,5	1 046,6	1 186,1	15,05	40,2	1 250,72	145,43	226,9	3,86	53,1	55,76	380,27
IPE A 400	20 292,6	1 022,3	1 143,9	16,66	35,8	1 170,84	130,09	202,1	4,00	45,2	34,79	432,22
IPE 400	23 128,4	1 156,4	1 307,1	16,55	42,7	1 317,58	146,40	229,0	3,95	51,1	51,08	490,05
IPE O 400	26 747,0	1 324,1	1 502,2	16,66	48,0	1 563,64	171,83	269,1	4,03	59,4	73,10	587,65

Tableau 1* : Profil IPE - Caractéristiques géométriques

* Source : page 18 de l'ouvrage *Produits en acier pour construction – Caractéristiques géométriques et mécaniques – Éditions 2011 – ConstruirAcier.*

10. EXEMPLE COMPLET

Déterminons par le calcul et à l'aide du catalogue de profilés, les caractéristiques géométriques de la section représentée à la *figure 19*. Les grandeurs à calculer sont :

- l'aire A de la section,
- la position du centre de gravité G et des axes principaux,
- les moments statiques S_y et S_z de la demi-section par rapport aux axes principaux,
- les moments d'inertie I_y et I_z par rapport aux axes principaux,
- les modules de résistance élastique $W_{el,y}$ et $W_{el,z}$
- les modules de résistance plastique $W_{pl,y}$ et $W_{pl,z}$

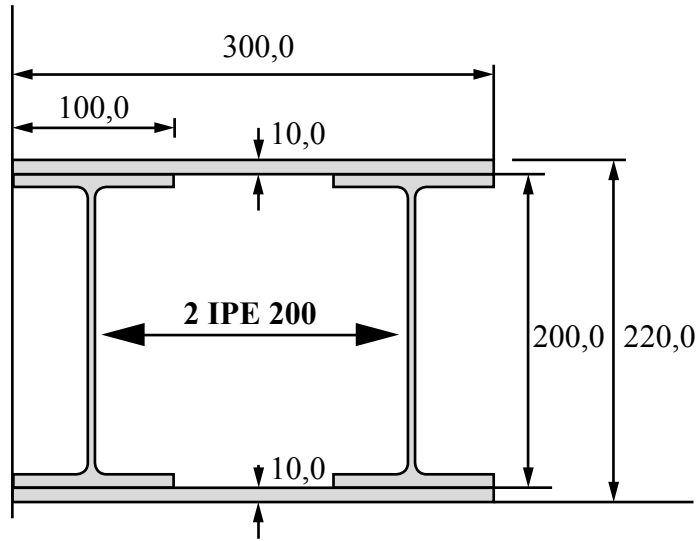


Figure 19: Section étudiée

Aire A

2 sections IPE 200 + 2 plaques 300 x 10 mm

$$A = 2 \times 28,5 + 2 \times 30 \times 1 = 117 \text{ cm}^2$$

Centre de gravité G et axes principaux :

Le centre de gravité est situé au centre de symétrie de la section. Les axes principaux sont confondus avec les axes de symétrie.

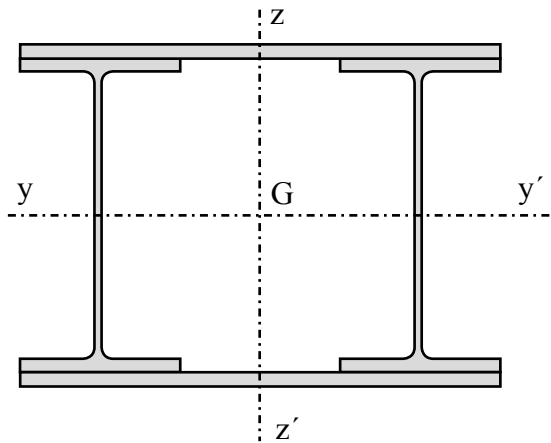


Figure 20: Axes principaux

Moments statiques de la demi-section composée :

Le moment statique S'_y d'un 1/2 IPE 200 est : $S'_y = W_{pl,y} / 2 = 110 \text{ cm}^3$ (catalogue)

$$S_y = (300 \times 10) \times (110 - 5) + 2 \times 100 \ 000 = 535 \ 000 \text{ mm}^3 = 535 \text{ cm}^3$$

$$S_z = (300 \times 10 / 2) (150 / 2) \times 2 + (150 - 50) \times 2 \ 850 = 510 \ 000 \text{ mm}^3 = 510 \text{ cm}^3$$

Moments d'inertie I_y , et I_z par rapport aux axes principaux:

Pour un IPE 200: $I_y' = 1943 \text{ cm}^4$ $I_z' = 142 \text{ cm}^4$ (catalogue)

Pour la section étudiée: $I_y = 2 \times 19\,430\,000 + 2 \times \frac{300 \times 10^3}{12} + 2 \times (300 \times 10) \times (100 + 5)^2$
 $= 105\,060\,000 \text{ mm}^4 = 10\,506 \text{ cm}^4$

$$I_z = 2 \times 1\,420\,000 + 2 \times 2\,850 \times (150 - 50)^2 + 2 \times \frac{300^3 \times 10}{12}$$

$$= 104\,840\,000 \text{ mm}^4 = 10\,484 \text{ cm}^4$$

Modules de résistance élastique $W_{el,y}$ et $W_{el,z}$:

$$W_{el,y} = \frac{I_y}{v_z} = \frac{10\,506}{11} = 955 \text{ cm}^3$$

$$W_{el,z} = \frac{I_z}{v_y} = \frac{10\,484}{15} = 698 \text{ cm}^3$$

Module de résistance plastique $W_{pl,y}$ et $W_{pl,z}$:

$$W_{pl,y} = 2S_y = 2 \times 535 = 1070 \text{ cm}^3$$

$$W_{pl,z} = 2S_z = 2 \times 510 = 1020 \text{ cm}^3$$

Rayons de giration i_y et i_z

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{10\,506}{117}} = 9,48 \text{ cm}$$

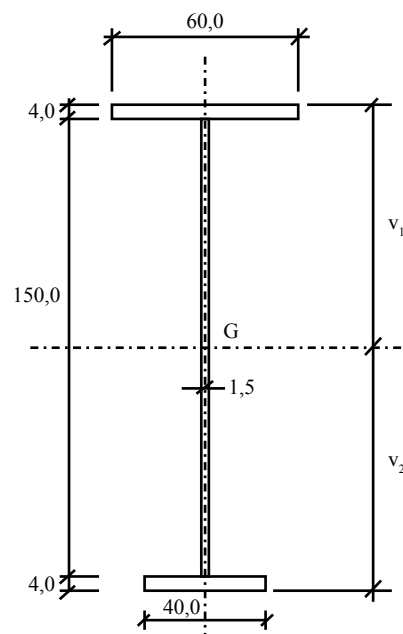
$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{10\,484}{117}} = 9,46 \text{ cm}$$

11. EXERCICES

1- Déterminer les caractéristiques géométriques de la section suivante (dimensions en cm):

On demande:

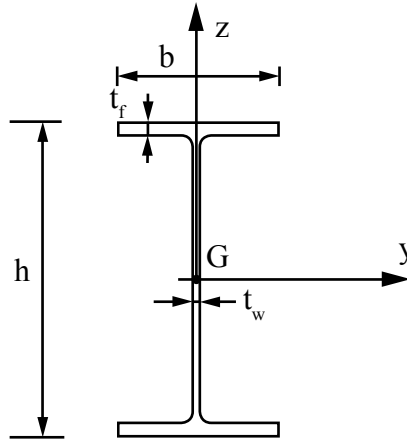
- 1- L'aire de la section A.
- 2- La position du centre gravité.
- 3- Les moments statiques S_y et S_z de la demi-section par rapport aux axes principaux.
- 4- Les moments d'inertie I_y et I_z par rapport aux axes principaux.
- 5- Les modules de résistance élastique $W_{el,y}$ et $W_{el,z}$.
- 6- Les rayons de giration i_y et i_z .



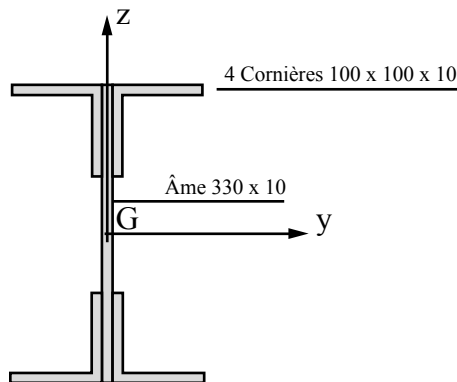
Chapitre 7: Caractéristiques géométriques des sections

2- Calculer l'inertie d'une section IPE 300, par rapport aux axes principaux:

$$t_w = 7,1 \text{ mm} ; t_f = 10,7 \text{ mm} ; h = 300 \text{ mm} ; b = 150 \text{ mm}$$



3- Déterminer toutes les caractéristiques géométriques de la section suivante (dimensions en mm):



8 Contraintes dans les sections de barres élastiques

1. INTRODUCTION

Dans le chapitre 4, nous avons vu comment déterminer les diagrammes de sollicitations dans les barres: effort normal N , effort tranchant V et moment de flexion M . La *figure 1* montre un élément de structure, qui peut être une poutre, un poteau, une membrure de barre à treillis. On a représenté la ligne moyenne de l'élément.

Nous allons déterminer les relations existant entre les efforts agissant sur une section, les contraintes dans cette section et les déformations de l'élément.

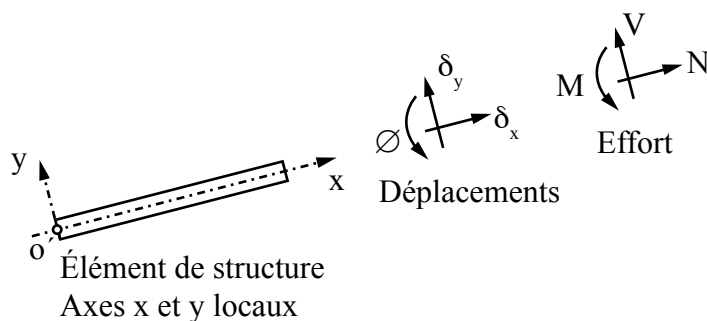


Figure 1: Efforts agissant sur une section d'élément de structure

2. TRACTION OU COMPRESSION

$$N \neq 0 \quad V = 0 \quad M = 0$$

Un élément de structure est soumis à traction ou compression pure lorsque l'effort tranchant V et le moment de flexion M sont nuls (*figure 2*): la seule sollicitation agissante est l'effort normal N . Si N est dirigé vers l'extérieur on aura de la traction et l'élément s'allongera. Sa longueur passera de L à $L + dL$. Si N est dirigé vers la section on aura de la compression et l'élément se raccourcira. Sa longueur passera de L à $L - dL$. L'allongement ou le raccourcissement par unité de longueur, appelé déformation, est $\varepsilon = \frac{dL}{L}$.

Selon l'hypothèse de Navier-Bernoulli, justifiée par des essais, toute section transversale initialement plane et normale à la ligne moyenne de la barre reste plane et normale à cette ligne sous chargement. La variation de longueur de toutes les fibres, donc la déformation, est constante dans toute la section. La contrainte est liée à la déformation par la relation de Hooke, $\sigma = E\varepsilon$ et est elle aussi constante en tout point de la section.

On peut écrire: $\sigma = \frac{N}{A} = \text{Constante}$ ou $N = \sigma A$

et: $\frac{dL}{L} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}$

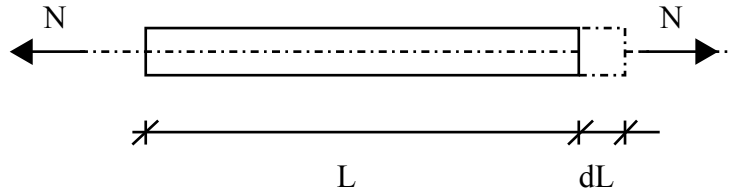


Figure 2: Élément soumis à un effort normal N (traction)

Cette situation où N est le seul effort agissant dans la section se rencontre entre autres dans les structures à treillis articulé: les liaisons entre les éléments, c'est-à-dire les assemblages, sont conçus pour ne pas transmettre de moments de flexion (• figure 3).

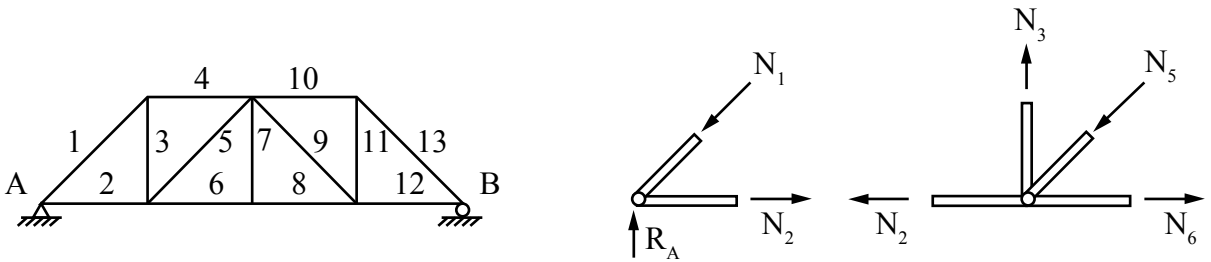


Figure 3: Treillis articulé

3. FLEXION PURE

$N = 0$ $V = 0$ $M \neq 0$

Un tronçon de barre est sollicité en flexion pure lorsque le moment de flexion est constant le long de ce tronçon. La partie centrale BC de la poutre AD sur la figure 4 est soumise à flexion pure. Le moment a pour valeur: $M = P \times a$ le long de BC.

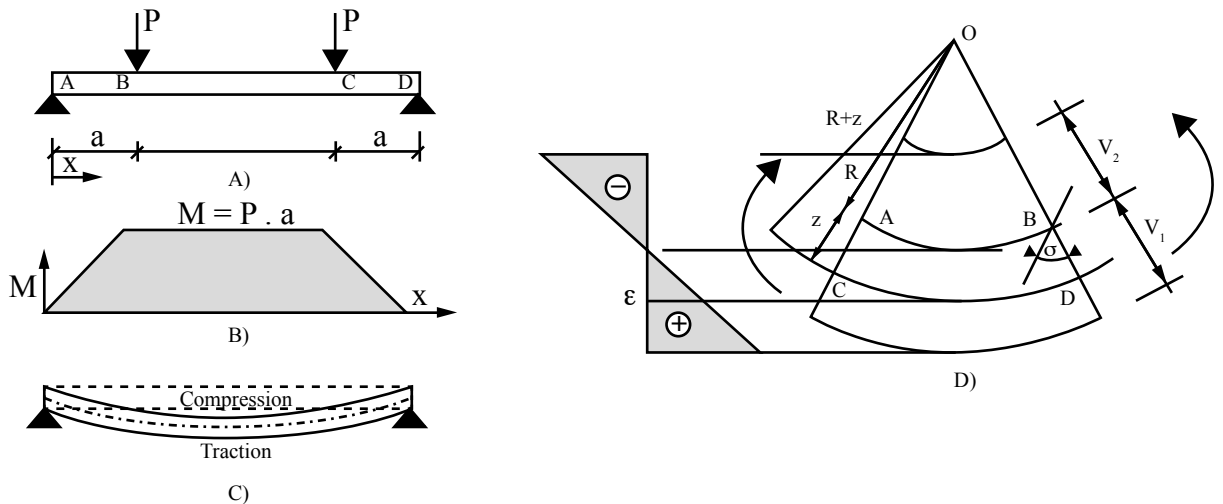


Figure 4: Tronçon de poutre en flexion pure

Compte tenu de nos conventions, le moment fléchissant est positif s'il donne à la poutre une courbure concave vers le haut. Il est négatif dans le cas contraire.

Les fibres situées au niveau de la ligne moyenne, qui passe par le centre de gravité de la section, ne varient pas de longueur.

Dans le cas de moment positif, les fibres situées au-dessus de cette ligne se raccourcissent, elles sont comprimées. Les fibres situées en dessous s'allongent, elles sont tendues.

3.1. Détermination des contraintes et déformations

Considérons à la *figure 4.D* un tronçon de poutre déformée, de longueur unitaire. Selon l'hypothèse de Navier-Bernoulli, les sections transversales initialement planes et normales à la ligne moyenne restent planes et normales à cette ligne après déformation. On peut montrer que la déformée que prend la poutre sous flexion pure a un rayon de courbure R constant, donc c'est un arc de cercle. Le diagramme des déformations ε est bi-triangulaire et par application de la loi de Hooke, $\sigma = E \varepsilon$, on en déduit que le diagramme des contraintes est lui aussi bi-triangulaire.

On peut montrer que la déformation à la cote z suit la loi (*figure 4.D*)

$$\varepsilon(z) = \frac{z}{R} \text{ ou } z \text{ est la distance à la ligne moyenne du point considéré et } R \text{ le rayon de courbure.}$$

On en déduit par la loi de Hooke: $\sigma(z) = E \varepsilon(z) = \frac{E z}{R}$

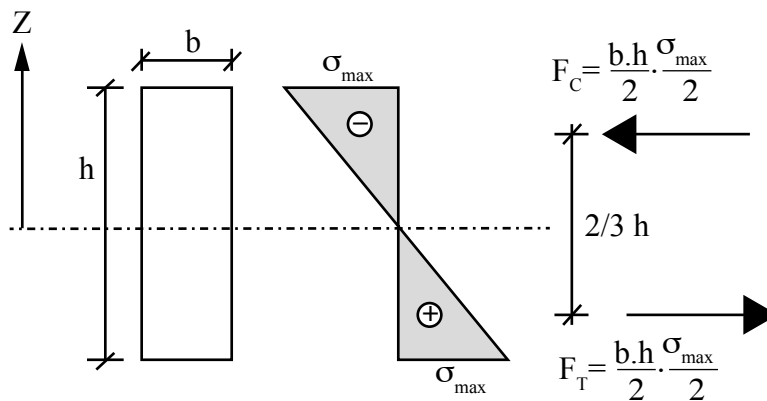


Figure 5 : Diagramme de contraintes

Pour une section rectangulaire (*figure 5*), les forces résultantes de traction F_T et de compression F_C sur les moitiés inférieure et supérieure ont pour intensité: $F = \frac{bh \sigma_{max}}{2}$.

Ces forces sont séparées par la distance $\frac{2}{3} h$.

On peut calculer les sollicitations dans la section :

$$N = F_T - F_C = \frac{bh \sigma_{max}}{2} - \frac{bh \sigma_{max}}{2} = 0$$

$$M = F \frac{2}{3} h = \frac{bh \sigma_{max}}{2} \frac{2}{3} h = \frac{bh^2}{6} \sigma_{max} \quad \text{d'où} \quad \sigma_{max} = \frac{M}{bh^2/6}$$

Par ailleurs: $\sigma = \sigma_{max} \frac{z}{h/2}$ d'où $\sigma = \frac{M}{bh^2/6} \frac{z}{h/2} = \frac{M}{bh^3/12} z = \frac{M}{I} z$

Le terme $\frac{bh^3}{12}$ n'est autre que le moment d'inertie de la section rectangulaire $I = \frac{bh^3}{12}$

Chapitre 8 : Contraintes dans les sections de barres élastiques

On démontre que la relation $\sigma = \frac{M \cdot z}{I}$ est vraie quelle que soit la forme de la section. C'est la formule générale donnant la valeur de la contrainte normale due au moment de flexion.

- M est le moment de flexion,
- z la cote à laquelle on veut calculer la contrainte,
- I le moment d'inertie de la section,
- σ la contrainte à la cote z.

- La contrainte de traction est maximale pour z maximal soit donc $z = v_1$, d'où :

$$\sigma_{\max}^t = \frac{M \cdot v_1}{I} = \frac{M}{\frac{I}{v_1}} = \frac{M}{W_{el.1}}$$

- La contrainte de compression est maximale en valeur absolue pour $z = v_2$, d'où :

$$\sigma_{\max}^c = \frac{M \cdot v_2}{I} = \frac{M}{\frac{I}{v_2}} = \frac{M}{W_{el.2}}$$

Les termes $W_{el} = \frac{I}{v}$ sont les modules de résistance élastique, l'une des caractéristiques géométriques de la section présentées au [chapitre 7](#). Pour avoir les contraintes de compression et de traction maximum, il suffit de diviser le moment M agissant sur la section par le module de résistance élastique correspondant. Pour les sections symétriques, $v_1 = v_2 = v$ et $W_{el.1} = W_{el.2} = W_{el}$.

3.2. Approximation pour les I

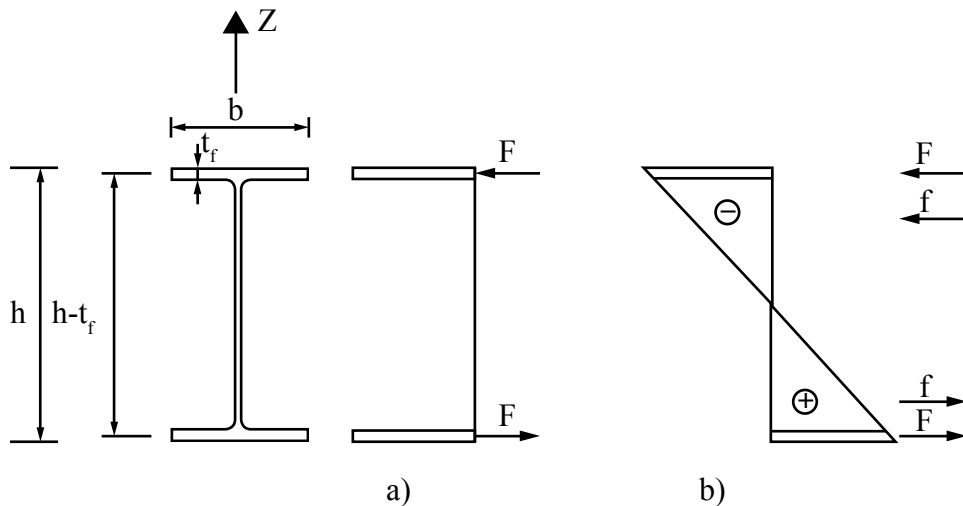


Figure 6 : Approximation pour les I

Considérons une section en I doublement symétrique. Le moment de flexion M_y dans ce type de section est transmis essentiellement par les semelles, car l'aire de celles-ci est importante, les contraintes y sont les plus élevées et elles sont éloignées du centre de gravité de la section. Considérons que la totalité du moment de flexion est transmise par les semelles ce qui place en sécurité (• [figure 6.a](#)). L'épaisseur des semelles étant très faible devant la hauteur h, nous pouvons considérer que les contraintes y sont constantes et égales à $\pm\sigma_s$. La force résultante dans chaque semelle a alors pour valeur $F = \pm\sigma_s b t_f$.

Le moment dû à ces deux forces s'écrit :

$$M = F(h - t_f) = \sigma_s b t_f (h - t_f) \quad \text{d'où:} \quad \sigma_s = \frac{M}{b t_f (h - t_f)}$$

Cette approximation place en sécurité.

Le calcul exact, plus favorable, fait intervenir aussi l'âme dans la transmission du moment fléchissant.

La contrainte maximale dans les semelles est $\sigma_{\max} = \frac{M}{W_{el}}$ ce qui est inférieur à la valeur approchée déterminée ci-dessus. Le module de résistance élastique W_{el} tient compte de la section complète (semelles, âme, congés de raccordement).

3.3. Flexion biaxiale

Lorsque les charges appliquées sur une barre ne sont pas dirigées suivant l'un des axes principaux de la section mais passent quand même par le centre de gravité de la section, on décompose ces charges en leurs composantes suivant les deux directions principales et on étudie indépendamment la flexion dans chacune de ces directions. On additionne en chaque point les contraintes normales déterminées par ces deux études (• *figure 7*).

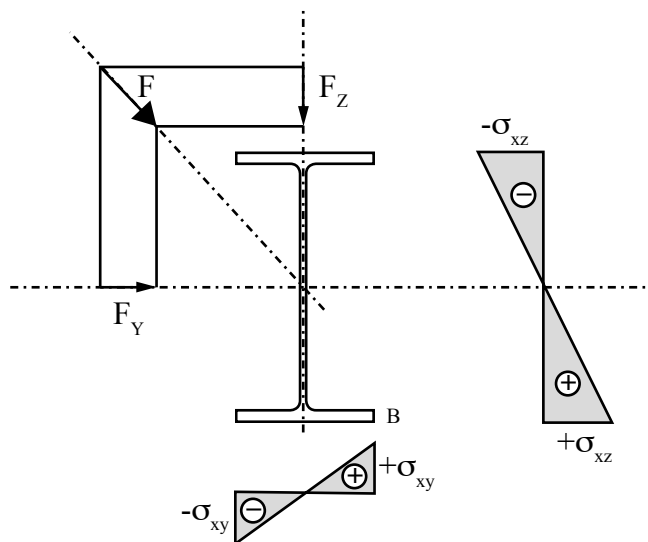


Figure 7: Flexion biaxiale

Les contraintes maximales de compression et de traction sont atteintes aux points A et B, situés sur les bords opposés des semelles. Elles ont pour valeur :

$$\text{En } \sigma_A = -\sigma_{xz} - \sigma_{xy} \text{ (compression)} \quad \text{En B: } \sigma_B = +\sigma_{xz} + \sigma_{xy} \text{ (traction)}$$

4. FLEXION ET EFFORT TRANCHANT (FLEXION SIMPLE)

$$N = 0 \quad V \neq 0 \quad M \neq 0$$

Dans un élément de structure tel qu'une poutre, l'effort tranchant V est toujours accompagné d'un moment de flexion M . Si dans un tronçon de barre, l'effort tranchant n'est pas nul, alors il existe un moment de flexion qui varie le long de ce tronçon. La *figure 8* représente une poutre sur deux appuis. Les tronçons AB et CD sont soumis à un effort tranchant constant $\pm P$ et à un moment de flexion variable $M = Px$ pour le tronçon AB et $M = P(L - x)$ pour le tronçon CD.

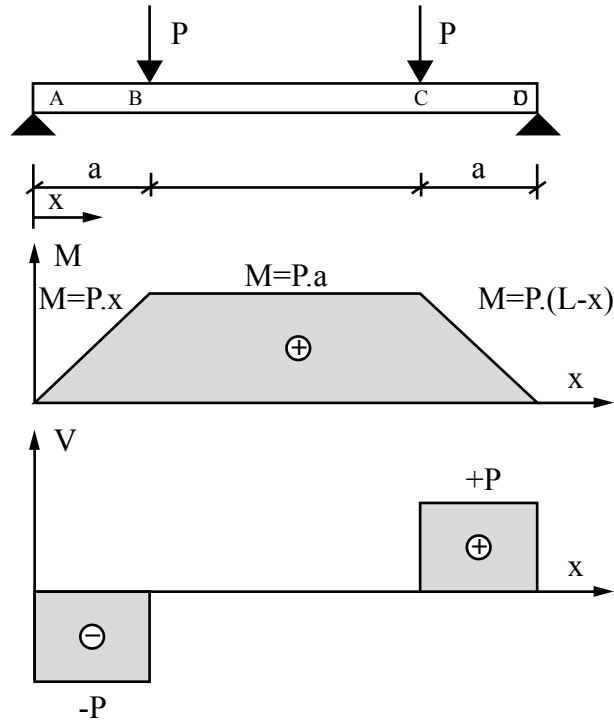


Figure 8 : Diagramme de moment de flexion et d'effort tranchant

4.1. Relation entre effort tranchant et moment de flexion

Considérons un tronçon de poutre de longueur \$dx\$, compris entre deux sections \$S_1\$ et \$S_2\$, le long duquel n'agissent aucune charge extérieure et aucun appui (• figure 9). L'effort tranchant et le moment de flexion ont pour valeur \$V\$ et \$M\$ dans la section \$S_1\$, et \$V\$ et \$M + dM\$ dans la section \$S_2\$, avec les sens positifs représentés sur la figure 9 pour les efforts du reste de la barre sur le tronçon étudié. L'effort tranchant ne varie pas car aucune charge extérieure ou réaction d'appui ne s'applique sur ce tronçon. Le tronçon est en équilibre, et le moment par rapport au centre de gravité de la section \$S_1\$ de tout ce qui agit sur le tronçon (les efforts de liaison \$V, M, V, M + dM\$) est nul, ce qui s'écrit :

$$-M + V \cdot dx + M + dM = 0 \quad \text{et d'où :} \quad V dx = -dM \quad \mathbf{V = - \frac{dM}{dx}}$$

Cette relation lie l'effort tranchant \$V\$ à la variation \$dM\$ du moment de flexion entre deux sections délimitant un tronçon de barre de longueur \$dx\$, non soumis directement à des charges extérieures ou des réactions d'appui. Cette relation est générale, valable quel que soit le comportement du matériau (élastique, plastique).

On en tire comme conséquence que :

- \$V\$ n'est pas nul s'il y a variation de moment; sous flexion pure, \$M\$ est constant et, l'effort tranchant \$V\$ est nul;
- si l'effort tranchant devient nul en une section comprise entre les extrémités d'une barre, le moment de flexion présente un maximum ou un minimum dans cette section.

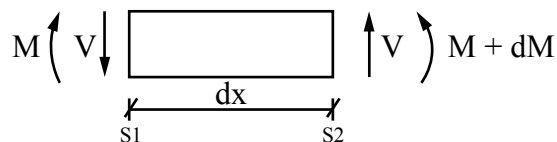


Figure 9 : Tronçon de barre étudié

4.2. Calcul de la contrainte de cisaillement et déformations correspondantes

On pourrait penser que la contrainte τ due à l'effort tranchant V est répartie uniformément sur toute la section de la poutre :

$$\tau = \frac{V}{A}$$

Cette approche est admise pour le dimensionnement des boulons bien qu'elle ne respecte pas les conditions d'équilibre interne du solide.

La formule exacte donnant la valeur de la contrainte de cisaillement en un point de la section est :

$$\tau = \frac{V.S}{b.I}$$

V étant l'effort tranchant dans la section considérée,

I le moment d'inertie de la section complète,

b la largeur de la section au point considéré,

S le moment statique par rapport à l'axe principal de toute la partie de la section située au-delà du point considéré (• partie hachurée sur la figure 10)

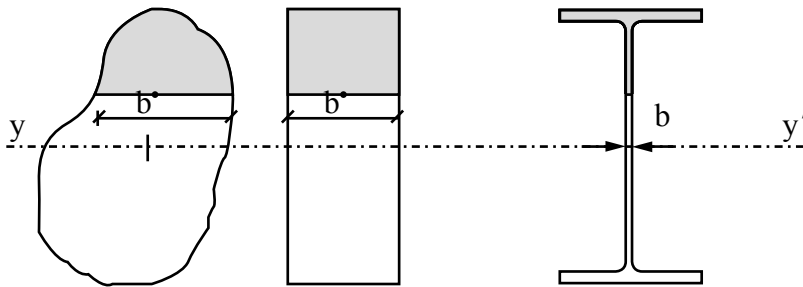


Figure 10 : Définition de b et S

Sous l'effet de l'effort tranchant, deux sections S_1 et S_2 , séparées par une distance dx glissent l'une par rapport à l'autre, parallèlement à elles-mêmes d'une valeur dz (• figure 11).

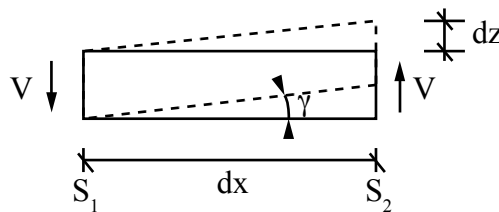


Figure 11 : Glissement sous contraintes tangentielles

4.3. Cas particulier des sections rectangulaires

Considérons la section rectangulaire de la figure 12 et appelons z l'ordonnée d'un point de la section.

L'aire de la surface ABCD est : $b(\frac{h}{2} - z)$

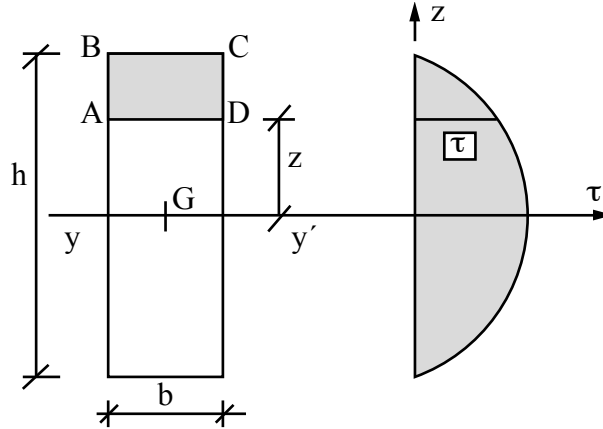


Figure 12 : Contrainte de cisaillement

Le moment statique de la surface ABCD par rapport à l'axe principal y'y' est :

$$S_y = b\left(\frac{h}{2} - z\right)\left[z + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - z\right)\right] = b\left(\frac{h}{2} - z\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + z\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)$$

L'inertie de la section complète par rapport à l'axe principal yy' est :

$$I_y = b\frac{h^3}{12}$$

La contrainte de cisaillement au point d'ordonnée z a donc pour valeur :

$$\tau = \frac{V \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)}{b \frac{b h^3}{12}} = 6 \frac{V}{A} \left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right) \quad \text{avec } A = b h$$

$\tau = f(z)$ est une équation du 2^e degré en z dont la courbe représentative est une parabole.

Pour $z = 0$ on a : $\tau_{\max} = \frac{3}{2} \times \frac{V}{A}$

Pour $z = \pm \frac{h}{2}$ on a : $\tau = 0$

Nous remarquons que la contrainte de cisaillement est nulle sur les fibres extrêmes et maximale sur l'axe principal, axe passant par le centre de gravité de la section, ce qui est une propriété générale, valable quelle que soit la forme de la section.

Pour les sections en I, on a une bonne approximation en considérant que tout l'effort tranchant est repris par l'âme et que la contrainte de cisaillement est constante dans l'âme.

Elle s'obtient alors en divisant l'effort tranchant par la section de l'âme : $\tau_{\max} = \frac{V}{A_w}$ (• Figure 13).

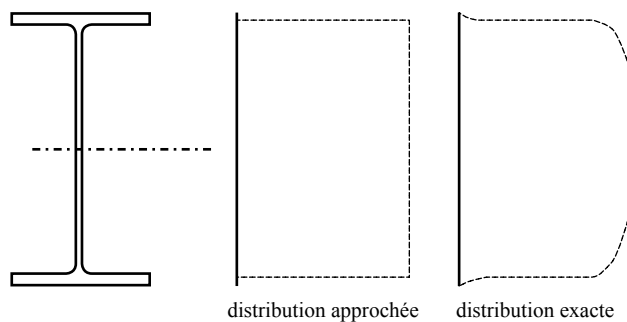


Figure 13 : Distribution des contraintes de cisaillement dans l'âme

5. FLEXION ET EFFORT NORMAL

5.1. Superposition des contraintes

Considérons la poutre console AB de section rectangulaire (• *figure 14*) soumise à une charge P en B :

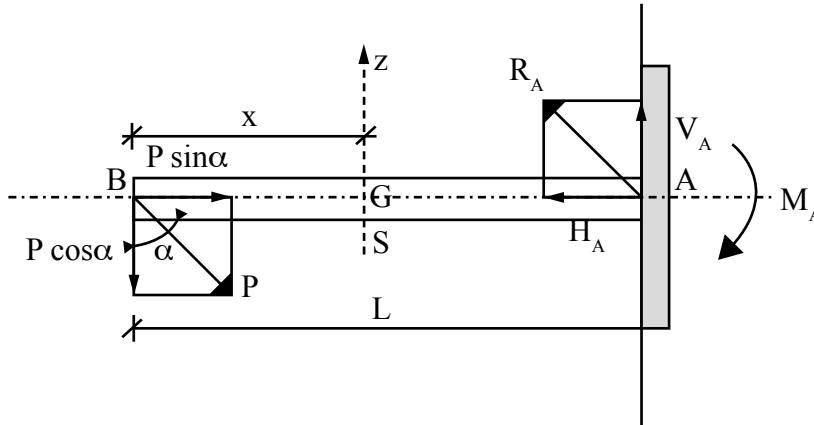


Figure 14: Flexion et effort normal

Les sollicitations dans la section (S) sont :

$$N = -P \sin \alpha \qquad V = P \cos \alpha \qquad M = -P \cos \alpha \cdot x$$

Étudions la distribution des contraintes normales produites par N et M dans cette section (• *figure 15*):

$$\begin{aligned} \text{Contrainte due à } N & : \quad \sigma_1 = \frac{N}{A} && \text{(avec } N \text{ négatif dans notre cas)} \\ \text{Contrainte due à } M & : \quad \sigma_2 = \frac{-M z}{I} && \text{(avec } M \text{ négatif dans notre cas)} \\ \text{Contrainte totale} & : \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{N}{A} - \frac{M z}{I} \end{aligned}$$

avec z compté positivement au-dessus de l'axe y'y et négativement en dessous.

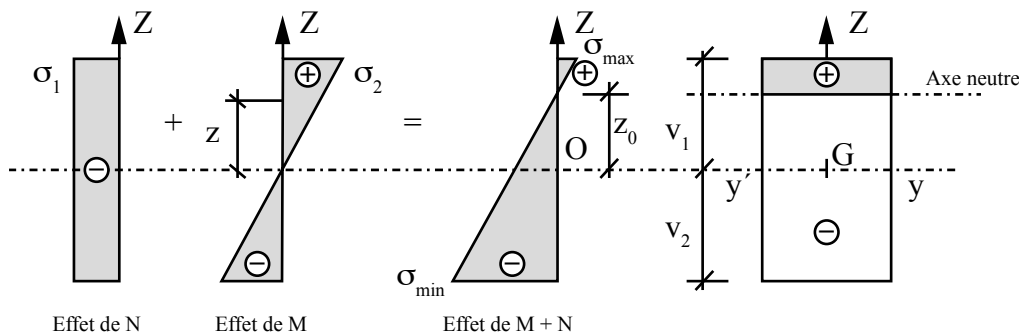


Figure 15: Flexion et effort normal

Sur les fibres extrêmes les contraintes ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_{2 \max} & = \frac{N}{A} - \frac{M v_1}{I} = \frac{N}{A} - \frac{M}{W_{el.1}} \\ \sigma_{\min} = \sigma_1 + \sigma_{2 \min} & = \frac{N}{A} + \frac{M v_2}{I} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_{el.2}} \end{aligned}$$

Dans la section étudiée, les fibres situées à la distance z_0 de l'axe $y'y$ (passant par le centre de gravité) ne subissent pas de contraintes. Une partie de la section est tendue, l'autre est comprimée. La ligne séparant ces deux parties est appelée « axe neutre » de la section.

5.2. Centre de poussée

Au centre de gravité d'une section, sous un chargement donné, les sollicitations se composent généralement d'un effort normal N , d'un effort tranchant V et d'un moment de flexion M . Il existe un point P dans le plan de la section, appelé centre de poussée, tel que, si l'on transporte les deux efforts N et V et le moment M en ce point, le moment résultant y est nul. Lorsqu'on examine les relations d'équilibre, les sollicitations N , V et M qui agissent au centre de gravité de la section sont équivalentes à une force de composante N et V agissant au centre de poussée. Le centre de poussée P est situé à une distance e (appelée excentricité) du centre de gravité G telle que, d'après l'équation d'équilibre des moments en G (• figure 16):

$$N \times e + V \times 0 = M \quad \text{soit:} \quad N \times e = M \quad \text{ou} \quad e = \frac{M}{N}$$

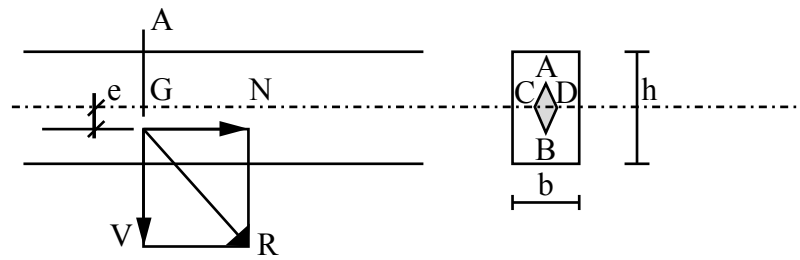


Figure 16: Flexion composée, excentricité

5.3. Noyau central de la section

Les contraintes sur les fibres extrêmes sous l'effet du moment de flexion M et de l'effort normal N sont données par:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W_{el}}$$

Pour une section rectangulaire on a: $A = b h$ $W_{el} = \frac{b h^2}{6}$ donc $\sigma = \frac{N}{b h} \pm \frac{M}{\frac{b h^2}{6}}$

La distance e entre le centre de gravité et le centre de poussée est telle que $M = N \cdot e$

donc on peut écrire: $\sigma = \frac{N}{b h} \pm \frac{6 N e}{b h^2} = \frac{N}{b h} (1 \pm \frac{6 e}{h})$

Avec N négatif (compression) σ restera négatif et toute la section sera comprimée si $1 \pm \frac{6 e}{h}$ reste positif, soit:

$$1 + \frac{6 e}{h} > 0 \Rightarrow e > -\frac{h}{6}$$

$$1 - \frac{6 e}{h} > 0 \Rightarrow e < +\frac{h}{6}$$

Donc toute la section reste comprimée si:

$$-\frac{h}{6} < e < +\frac{h}{6}$$

ce qui nous définit 2 points A et B tels que (• figure 16):

$$GB = -\frac{h}{6} \text{ et } GA = +\frac{h}{6}$$

En considérant la flexion dans le sens transversal on obtient: $GD = +\frac{b}{6}$ et $GC = -\frac{b}{6}$

Le losange ABCD définit une surface telle que si le centre de poussée se trouve à l'intérieur de celle-ci, toutes les fibres de la section sont soumises à des contraintes de même sens. Cette surface est appelée « Noyau central ».

Pour une SECTION CIRCULAIRE de rayon R, le noyau central est un cercle de rayon $\frac{R}{4}$

Exemple: Considérons un poteau HEB 160, libre en tête et encastré à la base par une platine de 200 mm x 360 mm (• figure 17).

Charge verticale: $N = 20\ 000\ daN$

Charge horizontale: $V = 500\ daN$

Moment à la base: $M = 500 \times 5 = 2\ 500\ daN.m$

Excentricité: $e = \frac{M}{N} = \frac{2\ 500}{20\ 000} = 0,125\ m$

Pour la base du poteau: $\frac{h}{6} = \frac{0,360}{6} = 0,060\ m$

Nous avons $e = 0,125 > \frac{h}{6} = 0,060\ m$

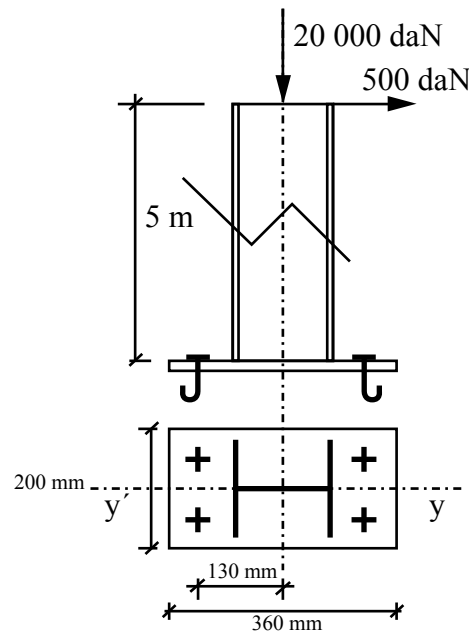
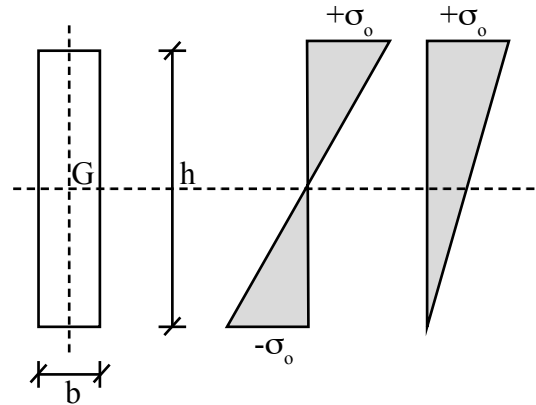


Figure 17

Le centre de poussée est à l'extérieur du noyau central. Une partie de la platine tendra donc à se soulever de son assise mais les boulons d'ancrage vont s'y opposer.

6. EXERCICES

1- Déterminer les sollicitations dans une section rectangulaire soumise aux contraintes normales représentées ci-contre, avec $b = 2,0 \text{ cm}$, $h = 15,0 \text{ cm}$ et $\sigma_0 = 240 \text{ N/mm}^2$.



2- Pour une section IPE 300 soumise à $M_y = 85 \text{ kN.m}$, $N = 300 \text{ kN}$, $V_z = 300 \text{ kN}$, calculer les contraintes dues à M_y , N , V_z et à $M_y + N$.

Résistance plastique des sections

Dans les vérifications traditionnelles de résistance de structures, on calcule les contraintes élastiques dues aux diverses sollicitations, et on vérifie que les valeurs de ces contraintes, éventuellement combinées entre elles, ne dépassent pas les limites permises pour que le matériau reste élastique.

Dans les méthodes modernes, applicables en particulier pour les barres laminées en acier IPE et HE, on vérifie que les sollicitations ne dépassent pas les valeurs maximales que peut supporter la section, généralement telles que les contraintes en tout point de la section soient égales à la contrainte limite élastique. Nous allons établir ces valeurs maximales lorsque chaque sollicitation agit seule, puis nous allons proposer une formule applicable lorsque plusieurs sollicitations agissent simultanément.

1. EFFORT NORMAL DE PLASTIFICATION

L'effort normal de plastification, noté N_{pl} , est tel que la contrainte normale en tout point de la section, d'aire A , soit égale à la contrainte limite d'élasticité f_y :

$$N_{pl} = A \cdot f_y$$

Lorsqu'une barre est soumise à traction seule, l'effort axial maximum qu'elle peut supporter est égal à N_{pl} . Lorsqu'elle est soumise à compression, un phénomène d'instabilité intervient généralement, appelé flambement, qui provoque l'effondrement de la barre avant que l'effort axial dans les sections n'atteigne la valeur N_{pl} .

2. EFFORT TRANCHANT DE PLASTIFICATION

L'effort tranchant de plastification, noté V_{pl} , est donné par le produit de l'aire de cisaillement A_v par la contrainte limite d'élasticité en cisaillement $f_y/\sqrt{3}$:

$$V_{pl} = A_v \cdot f_y / \sqrt{3}$$

Ceci revient à considérer que l'effort tranchant est transmis par une partie de la section, dont l'aire A_v peut être prise égale à :

- l'aire totale A de la section, pour une section rectangulaire ;
- $2A/\pi$ pour un profil creux circulaire ;
- l'aire de l'âme (ou des âmes) pour les sections en I, en H et en caisson avec chargement dans le plan de l'âme ;
- l'aire totale des semelles pour les sections en I, en H et en caisson avec chargement dans un plan parallèle aux semelles.

Pour les structures réelles, l'effort tranchant dans les sections, sous l'effet des actions extérieures, est en général très inférieur à l'effort tranchant de plastification.

3. MOMENT DE PLASTIFICATION

Lorsqu'une section est entièrement plastifiée par flexion, l'axe neutre est tel qu'il divise la section en deux parties d'aires égales : dans l'une la contrainte normale est égale à $+f_y$, et dans l'autre à $-f_y$. Le moment correspondant est appelé moment de plastification et est noté M_{pl} .

Ainsi pour la section rectangulaire représentée à la *figure 1*, la résultante des contraintes de compression dans la moitié supérieure est égale à :

$$F_c = -f_y \frac{b h}{2}$$

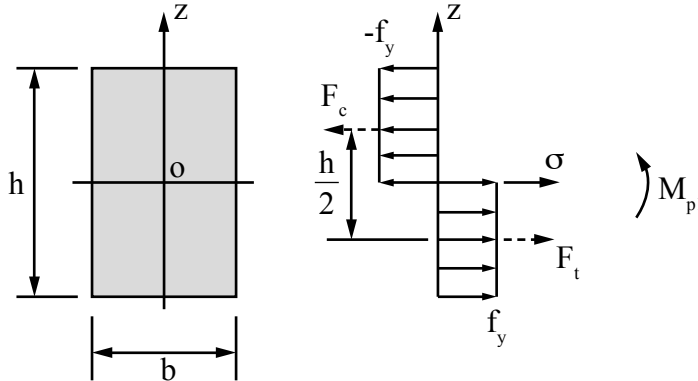


Figure 16 : Flexion composée, excentricité

La résultante des contraintes de traction dans la moitié inférieure est égale à :

$$F_t = +f_y \frac{b h}{2}$$

et la distance entre ces deux résultantes est $h/2$.

L'effort axial dans la section est nul :

$$F_c + F_t = 0$$

Le moment de flexion correspondant dans la section, noté M_{pl} , peut être calculé à partir du couple de forces résultantes F_c et F_t . Il est égal au produit de la valeur de ces forces par leur distance, soit donc :

$$M_{pl} = f_y \frac{b h}{2} \times \frac{h}{2} = \frac{b h^2}{4} f_y$$

Exemple : on veut calculer le moment de plastification de la section en I représentée à la *figure 2*. Les dimensions sont données en millimètres. On utilise un acier S 235.

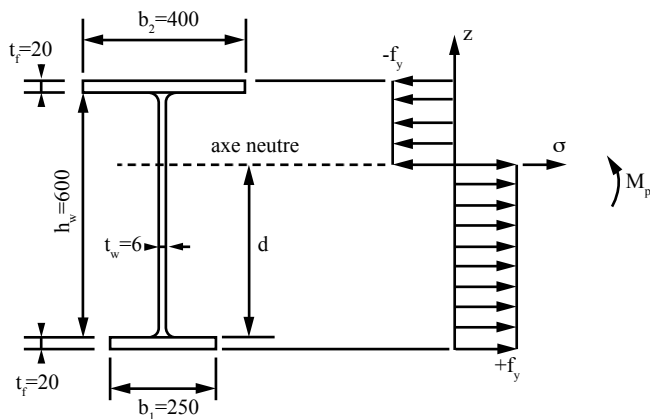


Figure 2 : Section en I étudiée

La contrainte limite d'élasticité des semelles est égale à $22,5 \text{ daN/mm}^2$, car leur épaisseur est supérieure à 16 mm (voir chapitre 6). Afin de simplifier les calculs, nous adoptons cette même valeur pour l'âme (au lieu de $23,5 \text{ daN/mm}^2$) ce qui place en sécurité.

Dans ce cas, l'axe neutre est tel qu'il divise la section en deux parties d'aires égales. Il est donc situé à une distance d de la semelle inférieure vérifiant :

$$b_1 t_f + d t_w = b_2 t_f + (h_w - d) t_w$$

soit :

$$250 \times 20 + d \times 6 = 400 \times 20 + (600 - d) \times 6$$

d'où l'on tire $d = 550 \text{ mm}$

Pour avoir le moment de plastification, on calcule les résultantes de compression dans la semelle supérieure et la partie d'âme comprimée et les résultantes de traction dans la semelle inférieure et la partie d'âme tendue.

Semelle supérieure :

$$F_c = b_2 t_f f_y = 400 \times 20 \times 22,5 = 180\,000 \text{ daN}$$

Partie d'âme comprimée :

$$F'_c = (h_w - d) t_w f_y = (600 - 550) \times 6 \times 22,5 = 6\,750 \text{ daN}$$

Semelle inférieure :

$$F_t = b_1 t_f f_y = 250 \times 20 \times 22,5 = 112\,500 \text{ daN}$$

Partie d'âme tendue :

$$F'_t = d t_w f_y = 550 \times 6 \times 22,5 = 74\,250 \text{ daN}$$

Le moment de plastification est égal à la somme des moments de toutes ces forces résultantes, calculé par rapport à l'axe neutre. On obtient :

$$\begin{aligned} M_{pl} &= 180\,000 \times 60 + 6\,750 \times 25 + 112\,500 \times 560 + 74\,250 \times 275 \\ &= 94\,387\,500 \text{ daN.mm} \\ &= 943,9 \text{ kN.m} \end{aligned}$$

Plus généralement, on peut montrer que le moment de plastification d'une section est obtenu en faisant le produit du module plastique de la section, noté W_{pl} et présenté au chapitre 7 pour les sections symétriques, par la contrainte limite d'élasticité f_y . Les valeurs du module plastique des profilés laminés (IPE, HE) sont données dans les catalogues.

4. SOLLICITATIONS COMBINÉES

L'effort tranchant V intervient rarement dans les vérifications de résistance : son effet est négligeable lorsque $V < 0,5 V_{pl}$, ce qui est habituellement le cas.

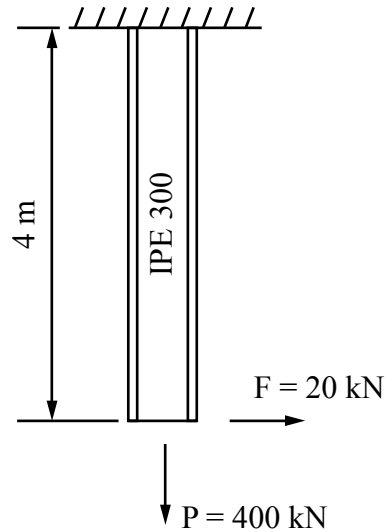
Lorsque plusieurs sollicitations : N , M_y et éventuellement M_z , agissent simultanément dans une section, on se place en sécurité en vérifiant la relation suivante :

$$\frac{N}{N_{pl}} + \frac{M_y}{M_{pl,y}} + \frac{M_z}{M_{pl,z}} < 1$$

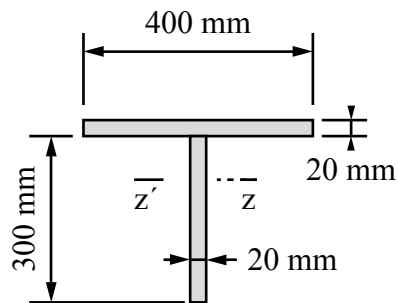
Si l'effort N est une compression, il faut également s'assurer que les sollicitations sont telles que la barre ne flambe pas.

5. EXERCICES

- En utilisant les caractéristiques données dans les catalogues, calculer l'effort normal de plastification N_{pl} et le moment de plastification $M_{pl,y}$ d'une section IPE 300 en acier S 235. Vérifier que la barre ci-contre est capable de résister aux charges appliquées.



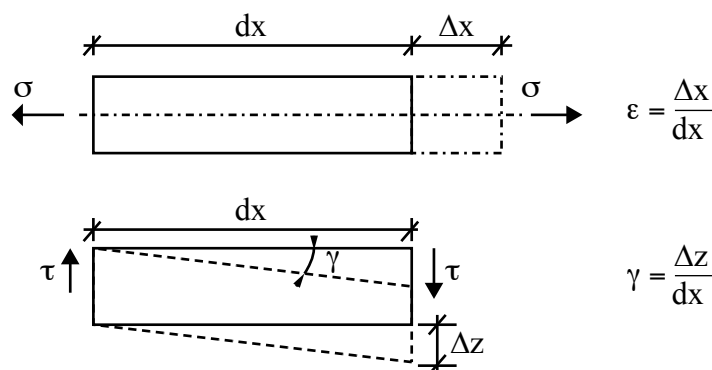
- Calculer l'effort normal de plastification N_{pl} et le moment de plastification $M_{pl,z}$ de cette section en T en acier S 235.



10 Déformation des poutres en élasticité

1. INTRODUCTION

Les charges agissant sur une structure créent des sollicitations dans les barres, qui produisent des déformations et des déplacements. Les contraintes σ et τ dans une section de barre peuvent être déterminées en fonction des sollicitations N , V et M agissant dans cette section. À chaque contrainte est associée une déformation qui dépend du comportement mécanique du matériau. Pour un élément dans le domaine élastique linéaire, le comportement est exprimé par la loi de Hooke, $\sigma = E \varepsilon$ et $\tau = G \gamma$ où ε est la déformation longitudinale due à la contrainte normale σ et γ la déformation transversale ou glissement due à la contrainte de cisaillement τ . Ces déformations sont représentées à la *figure 1* :



Les déplacements relatifs sont très petits s'ils sont analysés localement, par exemple sur une longueur dx . Par contre si l'on regarde les flèches et rotations totales en divers points d'une barre, elles sont loin d'être négligeables car elles résultent du cumul, de section en section, des déformations locales.

2. RELATION EFFORTS LOCAUX - DÉFORMATIONS LOCALES

Nous adoptons l'hypothèse de Navier-Bernoulli: sous l'action des charges, les sections transversales soumises à un moment de flexion et à un effort axial restent planes et normales à la ligne moyenne déformée de la poutre.

Considérons la poutre à section constante d'aire A et d'inertie I présentée à la *figure 2*. Elle est en équilibre et les sollicitations dans la section étudiée, d'abscisse x , sont notées N , V et M . Nous allons calculer les déformations locales et la loi de comportement relative à chaque effort pour un tronçon de cette poutre de longueur dx .

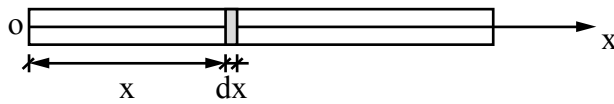


Figure 2: Poutre étudiée

- Sous l'effet de l'effort normal N (• figure 3) la longueur de la poutre varie. Elle s'allonge si N est un effort de traction et se raccourcit si N est un effort de compression. La ligne moyenne reste rectiligne, elle ne présente pas de courbure.

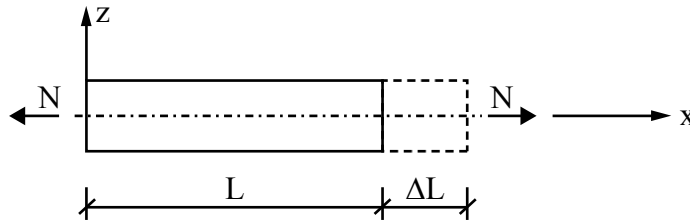


Figure 3: Poutre sous effort N

En tout point de la barre, on a :

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \text{et} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon$$

L'allongement total ΔL de la barre est tel que :

$$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon = \frac{s}{E} = \frac{N}{EA}, \quad \text{d'où} \quad \Delta L = \frac{NL}{EA}$$

- Sous l'effet du moment de flexion M (• figure 4), on a montré au chapitre 8 que :

$$\sigma = M \frac{z}{I}$$

$$\text{or } \sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{et} \quad R = \frac{z}{e} \quad (R = \text{rayon de courbure})$$

$$\text{d'où: } M = \frac{EI}{R}$$

Connaissant le diagramme de moment, et donc le rayon de courbure tout le long de la barre, on peut déterminer l'équation de la déformée de la barre et sa flèche maximale.

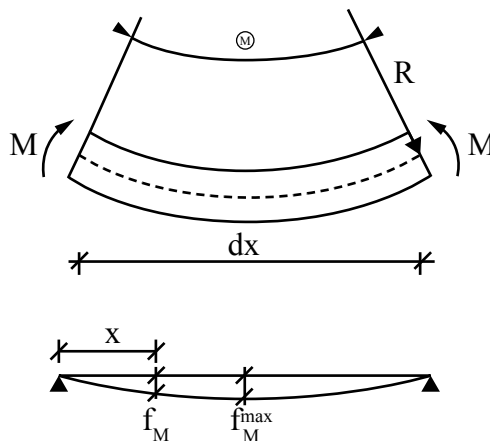


Figure 4: Déformation sous moment de flexion M

Les flèches maximales de poutres f_{\max} sont données dans des formulaires en fonction des conditions d'appuis et de chargement.

- Sous l'effet de l'effort tranchant V (• *figure 5*), il se produit un glissement relatif entre sections transversales. Pour deux sections séparées par une petite distance dx , le glissement Δz est donné par: $\Delta z = \alpha \frac{V}{GA} dx$ où α est un facteur qui dépend de la forme de la section. Le cumul de ces petits glissements Δz conduit à la flèche de la poutre due à l'effort tranchant.

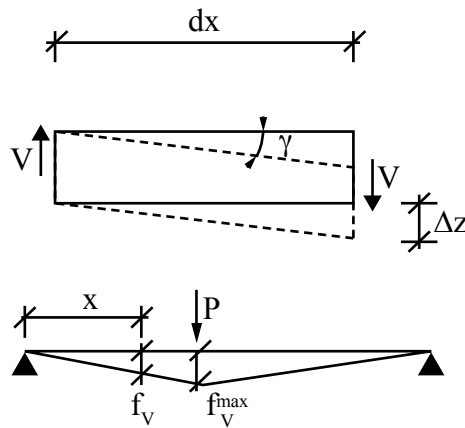


Figure 5: Déformation sous effort tranchant V

Dans une barre où il existe un effort tranchant, il existe aussi un moment de flexion. Nous montrerons au chapitre 4 que la flèche due à l'effort tranchant est en général négligeable devant celle due au moment de flexion.

3. FORMULAIRES

La détermination de l'équation de la ligne déformée en fonction de l'abscisse de la section n'est pas nécessaire dans les applications courantes. De nombreux formulaires fournissent ce résultat dans les cas simples.

La *figure 6* présente un exemple de ces formulaires. Il s'agit du cas d'une poutre sur deux appuis simples chargée uniformément. On y a indiqué les valeurs des réactions, les équations des diagrammes de sollicitations et des déformées. Les déformations dues à l'effort tranchant ont été négligées. Les flèches données sont donc celles dues au moment de flexion seul.

Chapitre 10: Déformation des poutres en élasticité

Réactions et sollicitations:	Déplacements:
$R_A = R_B = \frac{pL}{2}$	$\theta = -\frac{p}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$
$V = p(\frac{L}{2} - x)$	$f = +\frac{px}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$
$M = \frac{px(L-x)}{2}$	$f_{\max} = +\frac{5}{384} \frac{pL^4}{EI} = \frac{M_{\max} L^2}{9,6EI}$
$M_{\max} = \frac{pL^2}{8}$ pour $x = \frac{L}{2}$	$\theta_A = -\theta_B = -\frac{pL^3}{24EI}$

Figure 6: Poutre bi-appuyée

La *figure 7* donne la valeur de la flèche maximale (comptée positivement vers le bas) et celle de la rotation (comptée positivement dans le sens trigonométrique) pour des poutres soumises à diverses conditions de chargement et d'appui.

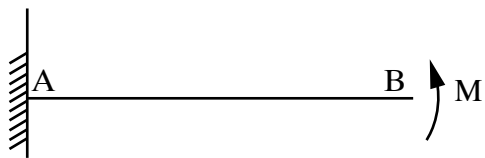
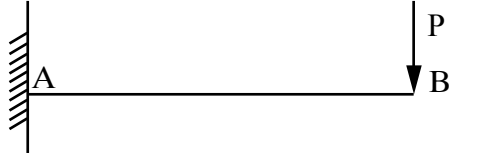
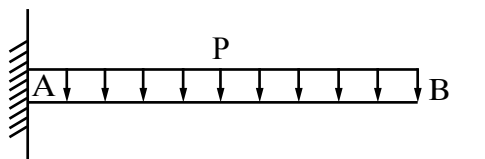
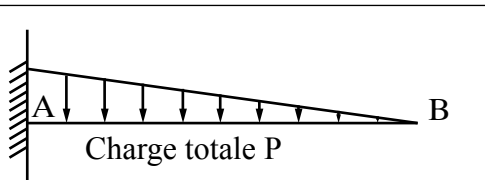
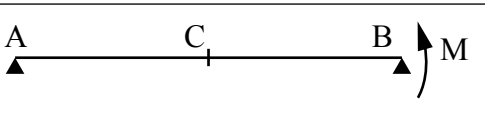
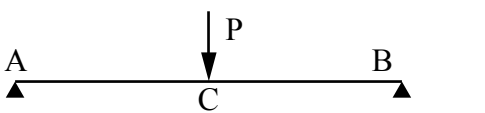
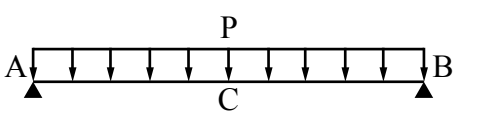
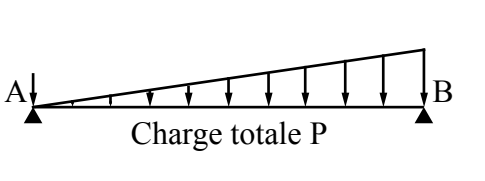
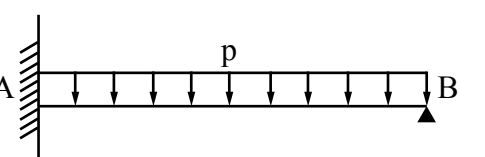
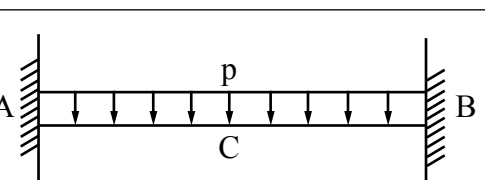
	Rotations	Flèches
	$\theta_B = + \frac{ML}{EI}$	$f_B = - \frac{ML^2}{2EI}$
	$\theta_B = - \frac{PL^2}{2EI}$	$f_B = + \frac{PL^3}{3EI}$
	$\theta_B = - \frac{pL^3}{6EI}$	$f_B = + \frac{pL^4}{8EI}$
	$\theta_B = - \frac{PL^2}{12EI}$	$f_B = + \frac{PL^3}{15EI}$
	$\theta_A = - \frac{ML}{6EI}$ $\theta_B = + \frac{ML}{3EI}$	$f_C = + \frac{ML^2}{16EI}$
	$\theta_A = -\theta_B = - \frac{PL^2}{16EI}$	$f_C = + \frac{PL^3}{48EI}$
	$\theta_A = -\theta_B = - \frac{pL^3}{24EI}$	$f_C = \frac{5}{384} \frac{pL^4}{EI}$
	$\theta_A = - \frac{7}{180} \frac{PL^2}{EI}$ $\theta_B = \frac{8}{180} \frac{PL^2}{EI}$	$f_{\max} = 0,0130 \frac{PL^3}{EI}$ pour $x = 0,519L$
	$\theta_B = + \frac{pL^3}{48EI}$	$f_{\max} = 0,0054 \frac{pL^4}{EI}$ pour $x = 0,579L$
		$f_C = \frac{pL^4}{384EI}$

Figure 7: Flèches et rotations de poutres

Exemple

Calculer la flèche maximale d'une poutre IPE 200 de 6 mètres de portée soumise à une charge uniformément répartie de 400 daN/m, lorsque la poutre est:

- 1- Encastrée uniquement à l'une de ses extrémités,
- 2- Appuyée simplement à ses deux extrémités,
- 3- Encastrée à une extrémité et simplement appuyée à l'autre,
- 4- Encastrée à ses deux extrémités.

Solution

$$\text{IPE 200: } I = 1943 \text{ cm}^4, \quad E = 21000 \text{ daN/mm}^2 = 21 \cdot 10^5 \text{ daN/cm}^2$$

$$L = 600 \text{ cm}, \quad p = 400 \text{ daN/m} = 4 \text{ daN/cm},$$

$$1- \quad f_{\max} = \frac{pL^4}{8EI} = \frac{4 \times 600^4}{8 \times 21 \cdot 10^5 \times 1943} = 15,88 \text{ cm}$$

$$2- \quad f_{\max} = \frac{5}{384} \frac{pL^4}{EI} = \frac{5}{384} \frac{4 \times 600^4}{21 \cdot 10^5 \times 1943} = 1,65 \text{ cm}$$

$$3- \quad f_{\max} = 0,0054 \frac{pL^4}{EI} = 0,0054 \frac{4 \times 600^4}{21 \cdot 10^5 \times 1943} = 0,68 \text{ cm}$$

$$4- \quad f_{\max} = \frac{pL^4}{384EI} = \frac{4 \times 600^4}{384 \times 21 \cdot 10^5 \times 1943} = 0,33 \text{ cm}$$

4. IMPORTANCE RELATIVE DES DÉFORMATIONS

La flèche due à l'effort tranchant V est en général faible par rapport à celle due au moment de flexion M . Elle peut être négligée comme nous allons le montrer. Cependant dans les cas très particuliers de poutres très chargées et de hauteur de section importante relativement à la portée, les déformations dues à l'effort tranchant V ne peuvent plus être négligées devant celles dues au moment de flexion M .

Nous allons examiner le cas d'un profil IPE 200 (• figure 8) supportant une charge concentrée en son milieu. Nous ferons un second calcul avec une charge uniformément répartie.

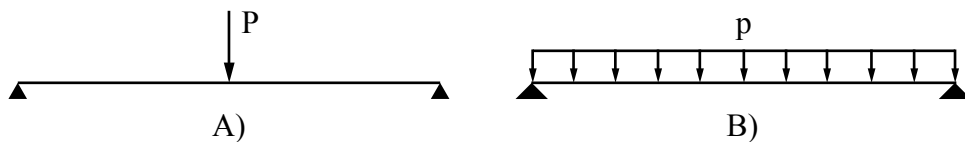


Figure 8: Poutre étudiée

- Sous charge concentrée (cas A), les flèches maximales dues au moment de flexion f_M et à l'effort tranchant f_V sont respectivement:

$$f_M = \frac{PL^3}{48EI} \quad f_V = \frac{PL}{4GA_w} \quad \text{d'où} \quad \frac{f_V}{f_M} = \frac{PL}{\frac{PL^3}{48EI}} = \frac{48EI}{4GA_w} \cdot \frac{1}{L^2}$$

- Dans le cas d'une charge répartie on a :

$$f_M = \frac{5pL^4}{384EI} \quad f_V = \frac{pL^2}{8GA_w} \quad \text{d'où} \quad \frac{f_V}{f_M} = \frac{\frac{pL^2}{8GA_w}}{\frac{5pL^4}{384EI}} = \frac{384EI}{40GA_w} \cdot \frac{1}{L^2}$$

Pour une poutre IPE 200 :

$$E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$$

$$G = 81\,000 \text{ N/mm}^2$$

$$h = 200 \text{ mm}$$

$$I = 1943 \text{ cm}^4$$

$$A_w \cong 200 \times 5,6 = 1120 \text{ mm}^2 = 11,2 \text{ cm}^2$$

Considérons des portées égales à 1, 2, 5, 10, 20, 50 fois la hauteur de la section. On obtient les résultats donnés dans le tableau ci-dessous. Lorsque la portée est supérieure à 10 fois la hauteur de la section, la flèche due à l'effort tranchant est inférieure à 13 % (cas A) ou 11 % (cas B) de celle due au moment de flexion et peut donc être négligée.

	$\frac{L}{h}$	1	2	5	10	20	50
Cas A	$\frac{f_V}{f_M}$	13,50	3,37	0,54	0,13	0,03	0,005
	$\frac{f_V}{f_M}$	10,80	2,70	0,43	0,11	0,027	0,004

Pour les poutrelles (IPE, IPN, IAP) uniformément chargées on utilise parfois la formule approchée :

$$\frac{f_V}{f_M} = 10 \frac{h^2}{L^2}$$

5. FLÈCHES DES POUTRES SUR DEUX APPUIS

5.1. Flèche maximale sous l'action d'une charge uniformément répartie

La valeur de la flèche maximum est :

$$f_{\max} = \frac{5}{0,0384} \cdot \frac{pL^4}{EI} \quad \text{avec:}$$

f_{\max} = flèche maximum en cm,

L = portée en mètres,

p = charge uniformément répartie en daN par mètre linéaire,

E = 21 000 daN/mm² pour l'acier,

I = moment d'inertie de la section en cm⁴.

En posant $\frac{5}{0,0384} \cdot \frac{L^4}{E} = \alpha$ on aboutit à $f_{\max} = \alpha \frac{p}{I}$. Les valeurs de α sont données dans le tableau 1.

Inversement, on peut déterminer le moment d'inertie minimum nécessaire pour que la flèche ne dépasse pas la valeur admissible f_{adm} par la relation :

$$I_{\min} = \frac{\alpha}{f_{\text{adm}}} \cdot p$$

p est exprimé en daN/m,

f_{adm} est exprimé en cm

I est obtenu en cm^4

Portée L (m)	α	Portée L (m)	α	Portée L (m)	α	Portée L (m)	α
2,0	0,099	4,5	2,543	7,0	14,89	9,5	50,50
2,1	0,121	4,6	2,776	7,1	15,75	9,6	52,61
2,2	0,145	4,7	3,025	7,2	16,66	9,7	54,69
2,3	0,173	4,8	3,291	7,3	17,61	9,8	57,18
2,4	0,206	4,9	3,574	7,4	18,59	9,9	59,56
2,5	0,242	5,0	3,875	7,5	19,62	10,0	62,00
2,6	0,283	5,1	4,194	7,6	20,69	10,1	64,52
2,7	0,329	5,2	4,533	7,7	21,80	10,2	67,12
2,8	0,381	5,3	4,892	7,8	22,95	10,3	69,78
2,9	0,438	5,4	5,272	7,9	24,15	10,4	72,53
3,0	0,502	5,5	5,676	8,0	25,39	10,5	75,36
3,1	0,573	5,6	6,098	8,1	26,69	10,6	78,27
3,2	0,650	5,7	6,544	8,2	28,04	10,7	81,27
3,3	0,735	5,8	7,018	8,3	29,42	10,8	84,35
3,4	0,829	5,9	7,511	8,4	30,87	10,9	87,52
3,5	0,930	6,0	8,034	8,5	32,37	11,0	90,77
3,6	1,041	6,1	8,583	8,6	33,92	11,1	94,12
3,7	1,162	6,2	9,164	8,7	35,52	11,2	97,57
3,8	1,283	6,3	9,765	8,8	37,18	11,3	101,09
3,9	1,434	6,4	10,40	8,9	38,90	11,4	104,7
4,0	1,582	6,5	11,07	9,0	40,68	11,5	108,4
4,1	1,752	6,6	11,77	9,1	42,52	11,6	112,3
4,2	1,929	6,7	12,50	9,2	44,42	11,7	116,2
4,3	2,119	6,8	13,26	9,3	46,38	11,8	120,2
4,4	2,324	6,9	14,06	9,4	48,41	11,9	124,3
						12,0	128,6

Tableau 1: Coefficient α

Exemple

On considère une poutre de 8 mètres de portée, simplement appuyée à ses extrémités et soumise à une charge uniformément répartie de 600 daN/m. Choisir un profil de la gamme IPE satisfaisant à la condition suivante flèche maximale inférieure à $1/500^{\circ}$ de la portée.

Solution

$$I_{min} = \frac{\alpha}{f_{adm}} q$$

f_{adm} est exprimé en cm ,

q est exprimé en daN/m ,

I est exprimé en cm^4 .

$$f_{adm} = \frac{L}{500} = \frac{800}{500} = 1,6 \text{ cm}$$

$$q = 600 \text{ daN/m}$$

Pour $L = 8 \text{ m}$: $\alpha = 25,39$ (tableau 1)

$$I_{min} = \frac{25,39}{1,6} 600 = 9521,250 \text{ cm}^4$$

On prendra un profil IPE 330, pour lequel $I = 11767 \text{ cm}^4$

Avec ce profil, on a une flèche: $f_{max} = \alpha \frac{q}{I} = 25,39 \frac{600}{11767} = 1,29 \text{ cm}$

5.2. Flèche maximale sous l'action d'une charge concentrée

On considère une poutre sur deux appuis soumise à une charge concentrée P appliquée à une distance a de l'appui le plus proche. La flèche à mi-portée sous cette charge concentrée est égale à la flèche sous la charge uniformément répartie de valeur $q = \beta \frac{P}{L}$ par unité de longueur, où β est un coefficient donné dans le tableau 2 en fonction du rapport $\frac{a}{L}$, toujours inférieur ou égal à 0,5. On procède ensuite comme indiqué en 5.1 pour avoir la flèche sous cette charge répartie équivalente.

a/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,0000	0,04799	0,09596	0,1438	0,1916	0,2392	0,2866	0,3338	0,3807	0,4273
0,10	0,4736	0,51948	0,5649	0,6099	0,6544	0,6984	0,7417	0,7845	0,8266	0,8681
0,20	0,9088	0,9487	0,9878	1,0261	1,0635	1,100	1,1355	1,1700	1,2035	1,2359
0,30	1,2672	1,2973	1,3263	1,3540	1,3804	1,4056	1,4294	1,4518	1,4728	1,4923
0,40	1,5104	1,5269	1,5418	1,5551	1,5668	1,5768	1,5850	1,5915	1,5952	1,5990
0,50	1,6000									

Tableau 2: Coefficient

Nota: Si a est différent de $\frac{L}{2}$ la flèche maximum sous la charge concentrée P n'est pas située à mi-portée mais diffère peu de la flèche au milieu de la poutre.

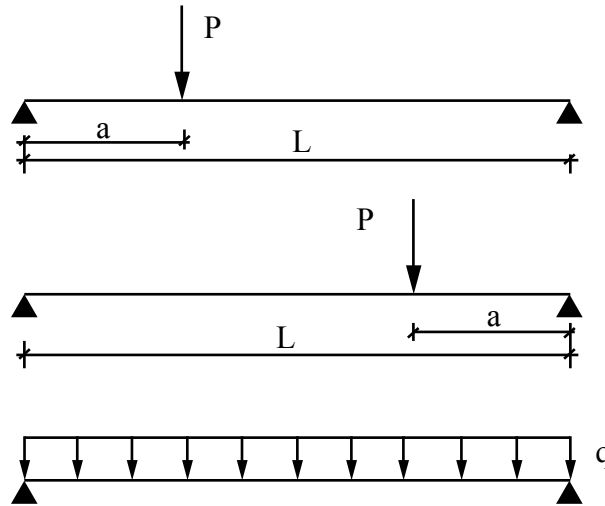


Figure 9: Charge P et charge équivalente q

Exemple

Soit un profil IPE 330 de 8 mètres de portée. Calculer la flèche maximale sous une charge concentrée de 3 000 daN située à 3 mètres de l'un des appuis.

Solution

IPE 330 $I = 11767 \text{ cm}^4$ $L = 8,0 \text{ m}$

Charge répartie équivalente à la charge concentrée :

$$q = \beta \frac{P}{L} \quad \text{avec} \quad \frac{a}{L} = \frac{3,0}{8,0} = 0,375$$

$\beta = 1,4518$ pour 0,37 $\beta = 1,4728$ pour 0,38 d'où $\beta = 1,4623$ pour 0,375

$$q = 1,4623 \frac{3000}{8} = 548 \text{ daN/m}$$

$$f_{max} = \alpha \frac{q}{I} \quad \text{avec} \quad \alpha = 25,39 \text{ (poutre de } 8,0 \text{ m de portée)}$$

f_{max} est exprimé en cm,

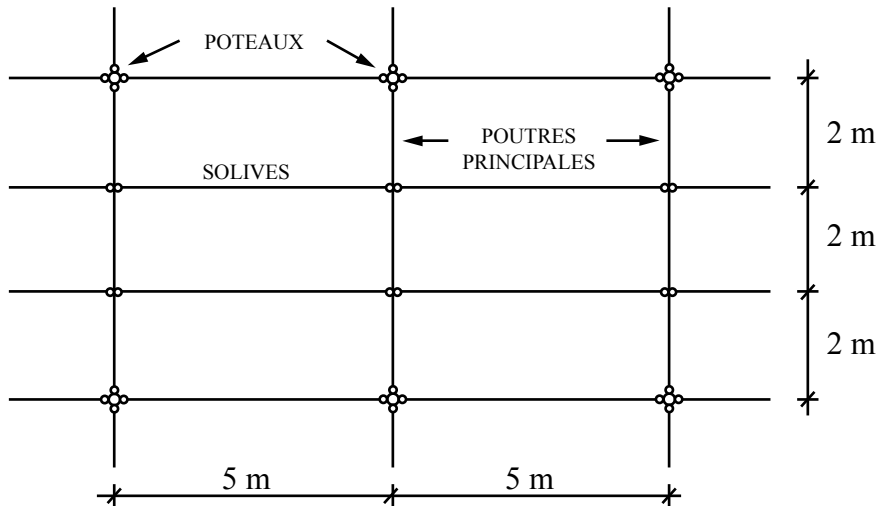
q est exprimé en daN/m,

I est exprimé en cm^4 .

$$f_{max} = 25,39 \frac{548}{11767} = 1,18 \text{ cm}$$

6. EXERCICE

Un plancher de poids propre 200 daN/m² doit pouvoir supporter une charge d'exploitation de 250 daN/m². Ce plancher est appuyé sur des solives de 5 mètres de portée, espacées de 2 mètres et articulées à chaque extrémité. Les solives sont fixées sur des poutres principales de 6 mètres de portée, articulées à chacune des extrémités sur des poteaux.



Dimensionner les solives et poutres principales courantes, en choisissant parmi les sections IPE, afin de respecter les critères de résistance et de rigidité suivants :

- Les contraintes sous charges pondérées (charges permanentes multipliées par 1,33 plus charge d'exploitation multipliée par 1,5) ne doivent pas dépasser la contrainte limite d'élasticité ;
- La flèche sous charge d'exploitation seule, non majorée par les coefficients de pondération, ne doit pas dépasser $1/300^e$ de la portée de la solive ou de la poutre.

11 Calcul des structures par ordinateur

1. INTRODUCTION

Il est largement fait appel à des programmes informatiques dans les phases de dimensionnement des structures, afin de soulager le projeteur d'opérations fastidieuses et répétitives. Ces programmes effectuent :

- soit une **simple analyse globale** : la géométrie de la structure ainsi que les caractéristiques des barres et des charges sont complètement définies par l'utilisateur. Le programme détermine les sollicitations et les contraintes dans les sections, les réactions aux appuis et les déplacements en certains points de la structure ;
- soit une **analyse globale de la structure suivie d'une analyse des barres**, par laquelle le programme vérifie si les sollicitations ou les contraintes dans les éléments sont admissibles ;
- soit un **dimensionnement, exact ou approché** : seules la géométrie de la structure et les valeurs des charges sont définies par l'utilisateur. Le programme choisit les caractéristiques des barres afin que celles-ci présentent une résistance suffisante pour supporter les charges. L'utilisateur doit encore s'assurer que les déplacements restent admissibles.

Nous ne nous intéressons ici qu'à l'analyse globale par ordinateur, dans laquelle on peut distinguer trois phases, selon l'organigramme présenté à la *figure 1* :

- 1- **Pré-traitement** : génération des données, à savoir caractéristiques de la structure et des chargements ;
- 2- **Module principal** : résolution par la méthode des déplacements ;
- 3- **Post-traitement** : présentation des résultats.

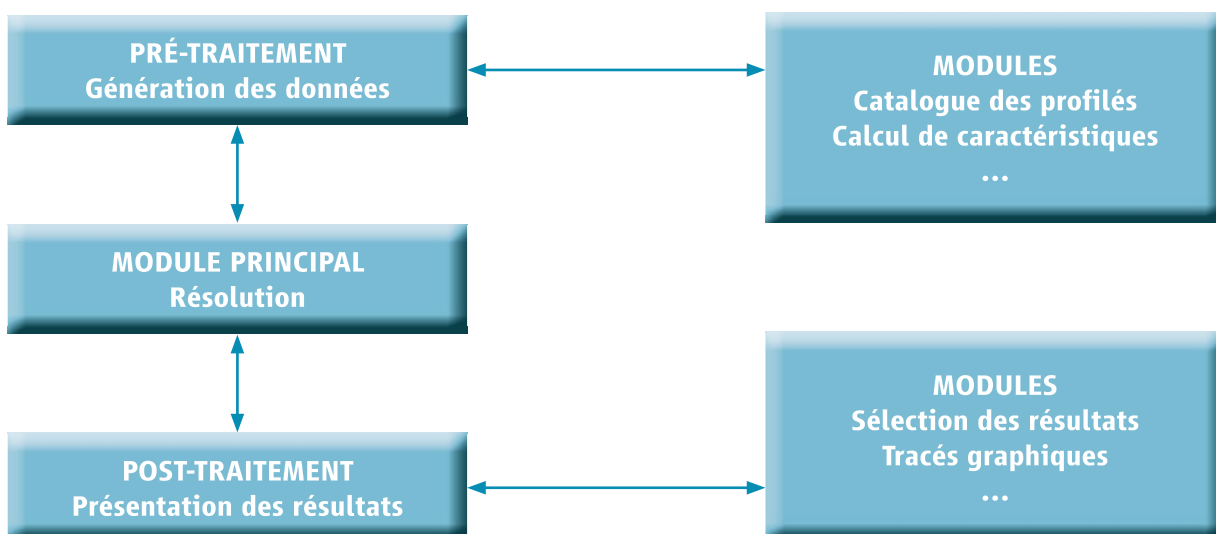


Figure 1: Organigramme pour analyse globale

Le module principal, qui effectue la résolution, est précédé d'un module de pré-traitement qui, s'il est élaboré, permet de générer de manière automatique les paramètres définissant la structure et les charges à partir d'un nombre très limité de données : par exemple données de la région, du site et de l'altitude pour générer les charges de neige et de vent.

Le volume des résultats est souvent très important. Il est utile d'effectuer un traitement de ces résultats afin de pouvoir les exploiter facilement. C'est le rôle des modules de post-traitement.

Nous allons présenter les diverses phases de l'analyse globale par ordinateur dans le cas de structures planes chargées dans leur plan.

2. ENTRÉES DES DONNÉES

Ce module effectue la saisie des données définissant la structure et les charges, à savoir :

- Position et caractéristiques des barres;
- Nature des liaisons entre barres et des liaisons avec les fondations;
- Nature, position et valeur des charges.

2.1 Axes globaux

La structure plane étudiée est modélisée : on trace sur une feuille un schéma de la structure, dans lequel chaque barre est représentée par sa ligne moyenne. On définit un système d'axes orthogonaux OX, OY (majuscules), qu'on appelle axes globaux. Ce choix des axes se fait de façon arbitraire mais il est généralement préférable, pour simplifier les entrées de données, que l'axe OX soit horizontal et l'axe OY vertical (• *figure 2*).

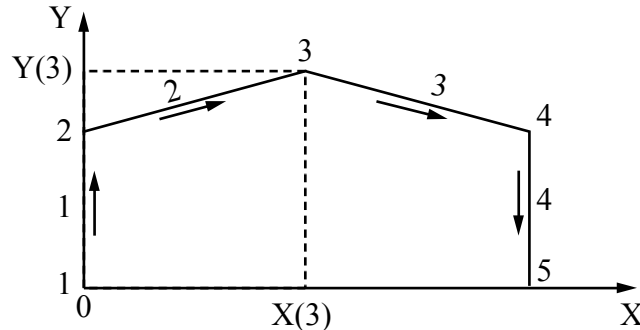


Figure 2 : Axes globaux et numérotation des nœuds et des barres

2.2 Position des nœuds

L'ordinateur ne traite que le cas de barres rectilignes, joignant deux points appelés «nœuds». Lorsqu'on est en présence de barres curvilignes ou de forme brisée, on les modélise par une suite de tronçons rectilignes, ou considérés comme tels, et chaque tronçon est assimilé à une barre. On numérote toutes ces barres et tous ces nœuds, et on détermine les abscisses et ordonnées de ces derniers dans le système d'axes globaux (• *figure 2*). Il existe un nœud à chaque point de liaison entre barres, à chaque extrémité libre et à chaque appui.

2.3 Position et caractéristiques des barres

Une barre relie deux nœuds. On choisit arbitrairement une orientation pour chaque barre : l'un des nœuds est alors le nœud «origine» de la barre et l'autre le nœud «extrémité». La position d'une barre est déterminée par les numéros de ses nœuds origine et extrémité.

À chaque barre est associé un système d'axes locaux ox, oy (minuscules). Le point o est situé au nœud origine. L'axe ox est porté par la ligne moyenne de la barre et orienté du nœud origine vers le nœud extrémité. L'axe oy est tel que le système d'axes ox, oy soit direct (• figure 3).

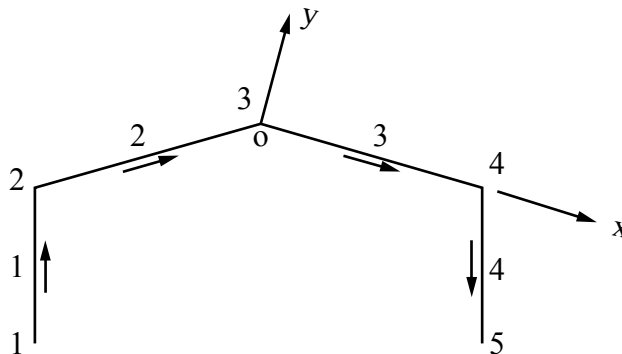


Figure 3 Axes locaux pour la barre 3

Pour chaque barre on définit les caractéristiques de la section. Ces caractéristiques peuvent être identiques pour plusieurs barres et dans ce cas il est fréquent de les grouper pour leur affecter les données communes. On définit également le module d'élasticité longitudinale E , qui est le même pour toutes les barres si un matériau unique est utilisé.

Dans le cas d'une analyse élastique, on entre les données suivantes pour chaque barre ou groupe de barres :

- A Aire de la section
- I moment d'inertie
- W_{el} module de résistance élastique

2.4 Appuis

Chaque nœud d'une structure plane chargée dans son plan possède trois degrés de liberté, ce qui veut dire que les déplacements de chaque nœud présentent trois composantes :

- la translation dans la direction OX
- la translation dans la direction OY
- la rotation dans le plan OX, OY

Aux points d'appui de la structure, qui sont des nœuds particuliers, certains de ces trois déplacements sont bloqués. Leurs valeurs restent nulles.

L'utilisateur d'un programme de calcul de structures va définir les numéros des nœuds qui sont considérés comme des appuis et pour chacun préciser les déplacements bloqués (ou les déplacements libres) parmi les trois possibles. Ainsi, pour un encastrement les 3 déplacements sont bloqués, pour une articulation les deux translations sont bloquées et la rotation est libre, pour un appui glissant, l'une des translations est libre...

2.5 Liaisons entre barres

En l'absence d'indications contraires, le programme considère que les liaisons entre barres sont rigides, c'est-à-dire que les extrémités des barres aboutissant à un nœud commun ont des déplacements identiques (mêmes translations et même rotation). S'il existe une articulation ou une possibilité de glissement relatif à l'une des extrémités de barre, il faut le faire savoir au programme. On effectue des

« relaxations » d'efforts dans ces sections particulières : relaxation de moment pour une articulation, qui a pour effets d'imposer au moment d'être nul et d'autoriser la rotation relative des sections de part et d'autre de l'articulation.

2.6 Définition des charges

L'utilisateur va en général définir des cas élémentaires de charges et les combinaisons de ces cas élémentaires. Certains programmes effectuent automatiquement les combinaisons à partir de cas élémentaires de types définis (charges permanentes, charges d'exploitation, neige et vent) en leur affectant les coefficients de sécurité réglementaires.

On distingue les charges agissant aux nœuds des charges agissant sur les barres.

Les charges agissant aux nœuds sont décrites dans le système d'axes global et ont pour composantes :

- une force concentrée F_x
- une force concentrée F_y
- un couple M_z

Les charges agissant sur les barres sont décrites dans les systèmes d'axes global ou local, et sont concentrées ou réparties. Pour de telles charges, on doit définir :

- le choix du système d'axes (global ou local),
- la nature de la charge (concentrée, uniformément répartie, répartie avec variation linéaire, force ou couple),
- la position de la charge sur la barre,
- la valeur algébrique de la charge.

D'autres types d'actions peuvent être prises en compte : déplacements d'appuis, variations de température,

3. MODULE PRINCIPAL

Tous les programmes de calcul de structures par ordinateur utilisent la méthode des déplacements. Les inconnues sont les déplacements aux nœuds. Dans le cas de structures planes, le nombre d'inconnues est donc égal à trois fois le nombre de nœuds, moins le nombre de déplacements bloqués aux appuis.

La *figure 4* présente l'organigramme d'un programme d'analyse globale de structures.

4. SORTIES DES RÉSULTATS

Le rôle de ce module est de communiquer les résultats provenant du calcul de la structure, à savoir :

- déplacements des nœuds (translations dans les directions OX et OY et rotation)
- efforts dans les barres (effort axial, effort tranchant, moment de flexion)
- contraintes dans les barres (contraintes normales, contraintes de cisaillement)
- les réactions aux appuis (forces dans les directions OX et OY et moment)

Ces résultats sont déterminés sous les cas élémentaires de chargement et sous les combinaisons de charges. Il faut bien connaître les conventions de signe adoptées par le programme, en particulier pour les efforts dans les barres. Ces conventions varient d'un programme à l'autre.

Il est possible, avec certains programmes, d'obtenir un traitement des résultats pour en faciliter l'exploitation : recherche des valeurs maximales, tracé graphique de la déformée de la structure ou des diagrammes de sollicitations dans les barres...

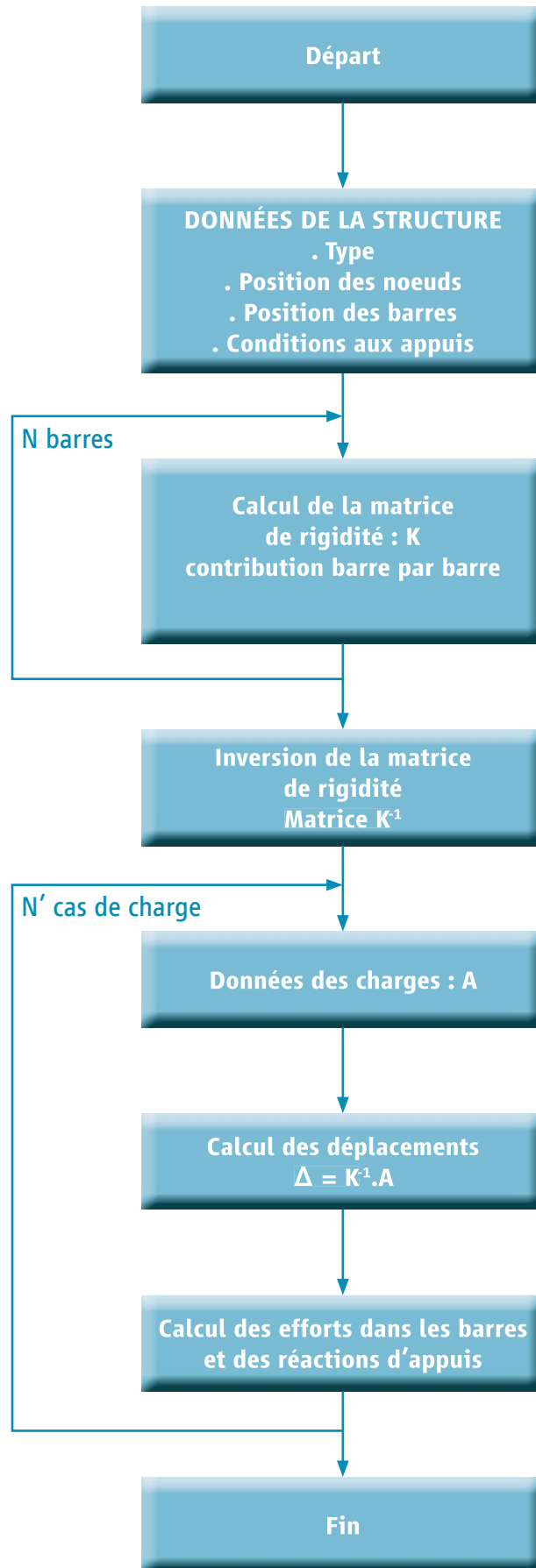


Figure 4: Calcul de structure par la méthode des déplacements.

5. EXEMPLE

Nous allons procéder au calcul par ordinateur du portique présenté à la *figure 5*. Les barres, en acier, ont des sections identiques (aire = 64,3 cm², inertie = 5 410 cm⁴, module de résistance élastique = 492 cm³).

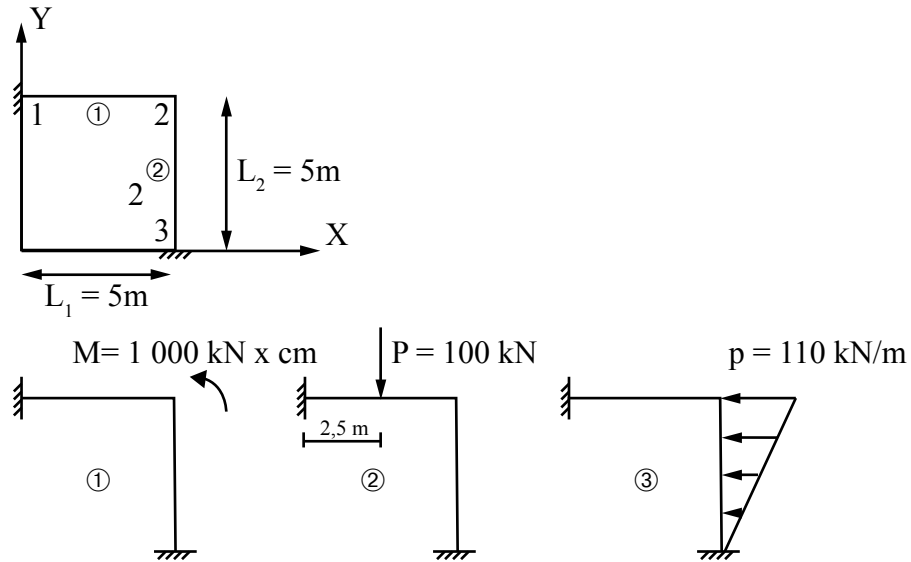


Figure 5 : Portique étudié

Nous donnons ci-après les entrées et sorties types du calcul par ordinateur de ce portique, accompagnées de commentaires en italiques.

5.1 Entrée des données

TYPE PORTIQUE PLAN

(définition du type de structure)

UNITÉS CM KN

(choix du système d'unités)

CORDONNÉES DES NŒUDS

1 0. 500. APPUI

(numéro du nœud, abscisse et ordonnée en cm)

2 500. 500.

3 500. 0. APPUI

LIAISONS

(liaisons entre barres)

1 1 2

(numéros de la barre, du nœud origine et du nœud

2 2 3

extrémité)

CONSTANTES

(caractéristiques du matériau)

E 21000. TOUS

(module d'élasticité, en kN/cm²)

CARACTÉRISTIQUES DES BARRES

1 2 AX 64.3 IZ 5 410. W 492.

(numéros des barres et caractéristiques)

CHARGE 1 'COUPLE M'

(numéro et titre du cas de charge)

CHARGE SUR NŒUD

2 MOMENT Z 1000. (numéro du nœud, valeur du moment en kN. cm)
 CHARGE 2 'FORCE P'
 CHARGE SUR BARRE
 1 FORCE Y GLOBAL CONCENTRÉE -100. L 0.5
 (force concentrée dirigée suivant l'axe global OY, appliquée sur la barre 1 à une distance de l'origine de la barre égale à 0,5 fois la longueur de la barre)

CHARGE 3 'FORCE REPARTIE'
 CHARGE SUR BARRE
 2 FORCE X GLOBAL LINÉAIRE WA -0.10 WB 0.
 (force dirigée suivant l'axe global OX, variant linéairement de la valeur -0.10 kN/cm à l'origine de la barre 2 à la valeur 0. à l'extrémité de la barre)

CHARGE 6 COMBINAISON 1 1. 2 1. 3 1.
 (la combinaison 6 est obtenue en prenant le cas 1 multiplié par 1., plus le cas 2 multiplié par 1., plus le cas 3 multiplié par 1.)

RÉSOUTRE (demande de résolution)
 IMPRIMER DÉPLACEMENTS (demande de résultats)
 IMPRIMER SOLlicitATIONS
 IMPRIMER RÉACTIONS
 FIN

5.2 Sortie des résultats

UNITÉS ACTIVES CM KN RADIAN

DÉPLACEMENTS

CHARGEMENT 1: COUPLE M

NŒUD	DEPL. X	DEPL. Y	ROT. Z
1	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0
2	-0.055	0.055	0.055

CHARGEMENT 2: FORCE P

NŒUD	DEPL. X	DEPL. Y	ROT. Z
1	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0
2	0.344	-1.500	0.342

CHARGEMENT 3: FORCE REPARTIE

NŒUD	DEPL. X	DEPL. Y	ROT. Z
1	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0
2	-0.577	-0.068	-0.068

CHARGEMENT 6 : COMBINAISON

NŒUD	DEPL. X	DEPL. Y	ROT. Z
1	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0
2	-0.976	-1.513	0.329

EFFORTS DANS LES BARRES

CHARGEMENT 1 : COUPLE M

BARRE	NŒUD	NORMAL	TRANCHANT	FLEXION
1	1	01.498	01.498	249.243
1	2	-01.498	-01.498	499.999
2	2	-01.498	01.498	499.998
2	3	01.498	-01.498	249.243

CHARGEMENT 2 : FORCE P

BARRE	NŒUD	NORMAL	TRANCHANT	FLEXION
1	1	09.290	59.499	7845.502
1	2	-09.290	40.508	-3099.865
2	2	40.508	09.290	3099.865
2	3	-40.508	-09.290	1545.245

CHARGEMENT 3 : FORCE REPARTIE

BARRE	NŒUD	NORMAL	TRANCHANT	FLEXION
1	1	15.582	-01.846	-307.171
1	2	-15.582	01.846	-616.208
2	2	01.846	15.582	616.208
2	3	-01.846	09.417	-1158.080

CHARGEMENT 6 : COMBINAISON

BARRE	NŒUD	NORMAL	TRANCHANT	FLEXION
1	1	26.371	59.143	7787.573
1	2	-26.371	40.856	-3216.071
2	2	40.856	26.371	4216.071
2	3	-40.856	-01.371	636.403

RÉACTIONS D'APPUIS

CHARGEMENT 1 : COUPLE M

NŒUD	FORCE X	FORCE Y	MOMENT Z
1	01.498	01.498	249.243
3	-01.498	-01.498	249.243

CHARGEMENT 2 : FORCE P

NŒUD	FORCE X	FORCE Y	MOMENT Z
1	09.290	59.491	7845.507
3	-09.290	40.508	1545.246

CHARGEMENT 3 : FORCE REPARTIE

NŒUD	FORCE X	FORCE Y	MOMENT Z
1	15.582	-01.846	-307.171
3	09.417	01.846	-1158.080

CHARGEMENT 6 : COMBINAISON

NŒUD	FORCE X	FORCE Y	MOMENT Z
1	26.371	59.143	7787.578
3	-01.371	40.856	636.403

FIN

Remarque: la convention de signe adoptée par ce programme pour les efforts dans les barres est la suivante: les efforts aux nœuds origine et extrémité de la barre représentent les actions du nœud sur la barre, affectées d'un signe + si elles sont dirigées dans le sens positif défini par les axes locaux. Ainsi un effort normal est positif à l'origine de la barre si l'action du nœud sur la barre est orientée dans le sens de l'axe local ox, donc si la barre est comprimée

*Corlet imprimeur (Condé-sur-Noireau)
n° d'impression : 161695
dépot légal 1^{er} trimestre 2014*



La résistance des matériaux

Le présent ouvrage est accessible à tous ceux qui veulent acquérir les connaissances de base en résistance des matériaux sans entrer dans des développements mathématiques ou théoriques : candidats à certains bacs techniques ou professionnels, étudiants en écoles d'architecture, techniciens dans le domaine de la construction se perfectionnant dans le cadre de stages de formation continue,...

Les notions de mathématiques auxquelles il est fait appel sont simples et exposées dans le premier chapitre. Il n'est pas fait usage de dérivées, différentielles, intégrales, calcul matriciel, et cependant toutes les bases de résistance des matériaux nécessaires à la compréhension du comportement des structures et aux calculs courants sont présentées, d'une manière claire et rigoureuse. Aux démonstrations théoriques, ont été préférées des explications physiques, concrètes.

Les auteurs ont acquis une expérience en enseignant cette matière à des étudiants en Écoles d'Architecture ainsi qu'à des techniciens en stages de Formation Continue.

Dans cet ouvrage ont été adoptées la terminologie, les conventions et les notations désormais communes à tous les matériaux (acier, béton) définies dans les normes françaises (Afnor), européennes (EN), internationales (ISO) ; elles diffèrent parfois des habitudes acquises de longue date dans chaque profession. Ce manuel donne donc des bases, applicables à tous les matériaux, qui permettent en particulier de comprendre le fonctionnement des structures et d'aborder tous les règlements actuels de construction.

Ce livre est le premier d'une série à paraître sur des sujets proches et complémentaires : exercices corrigés de résistance des matériaux, note de calcul d'un bâtiment à ossature métallique, initiation à la conception et au calcul réglementaire des charpentes métalliques,...