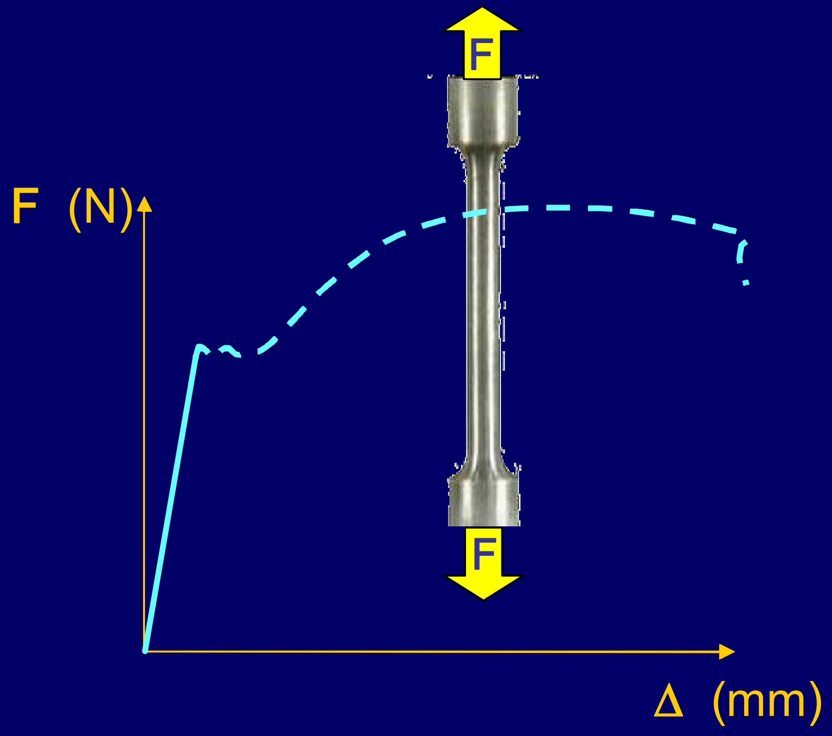
Théorie énergétique

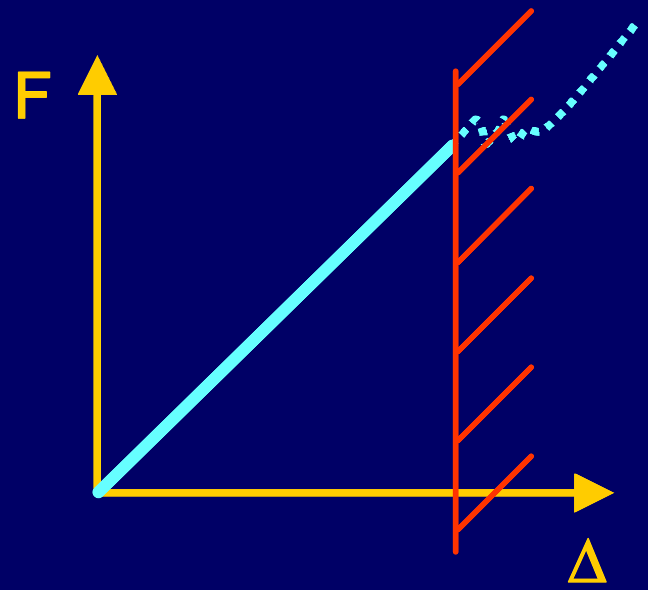
Energie de déformation élastique

Énergie de déformation
d'un système à comportement linéaire élastique.

Cadre et limites de la théorie présentée.

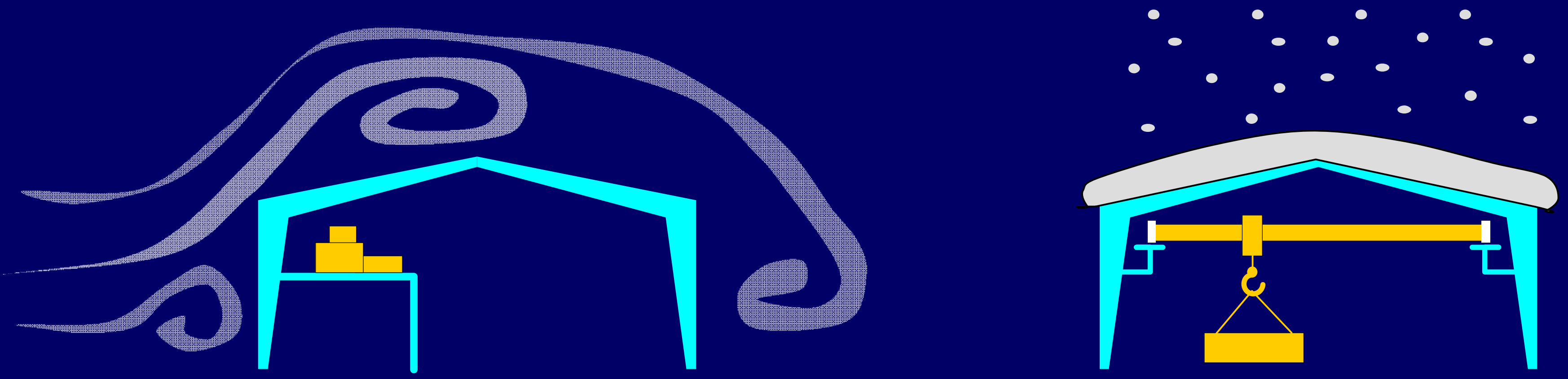
Les chargements sont tels que le matériaux (acier doux) reste dans le domaine de comportement élastique linéaire.





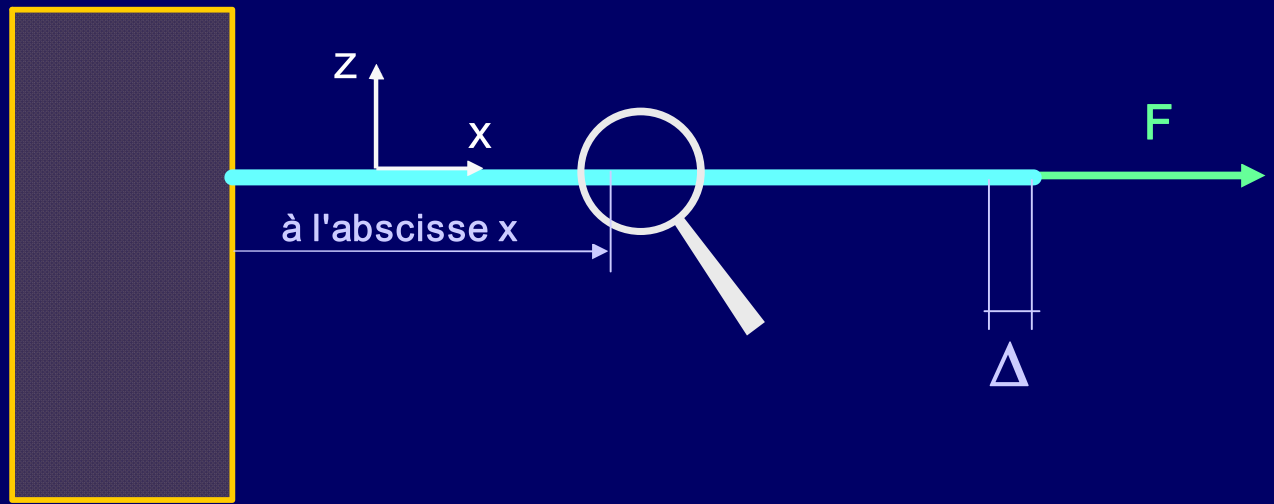
Cadre et limites de la théorie présentée.

Leur application est considérée comme
une succession d'états d'équilibre (quasi statique).



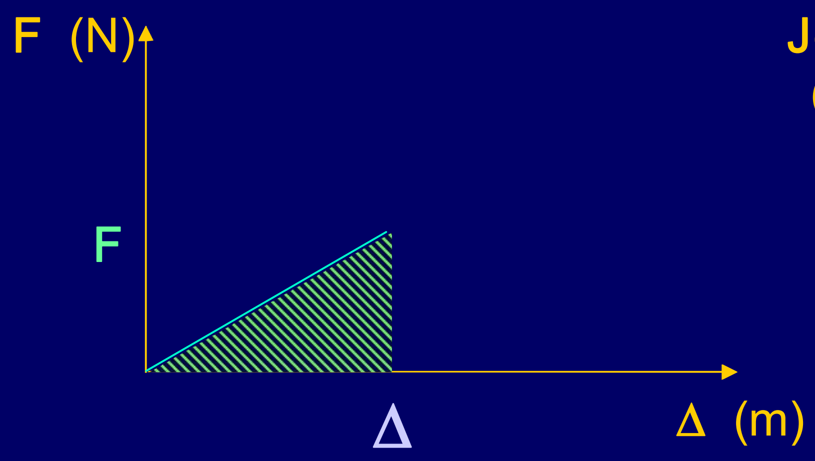
Cas de la traction pure.

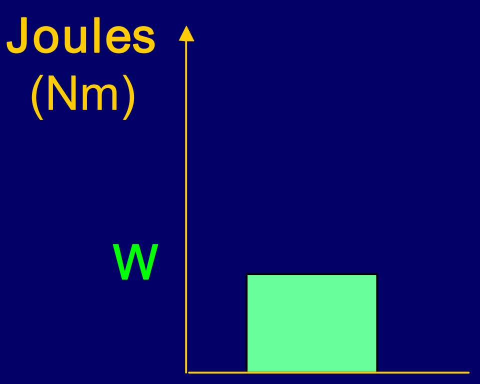
Poutre soumise à de la traction



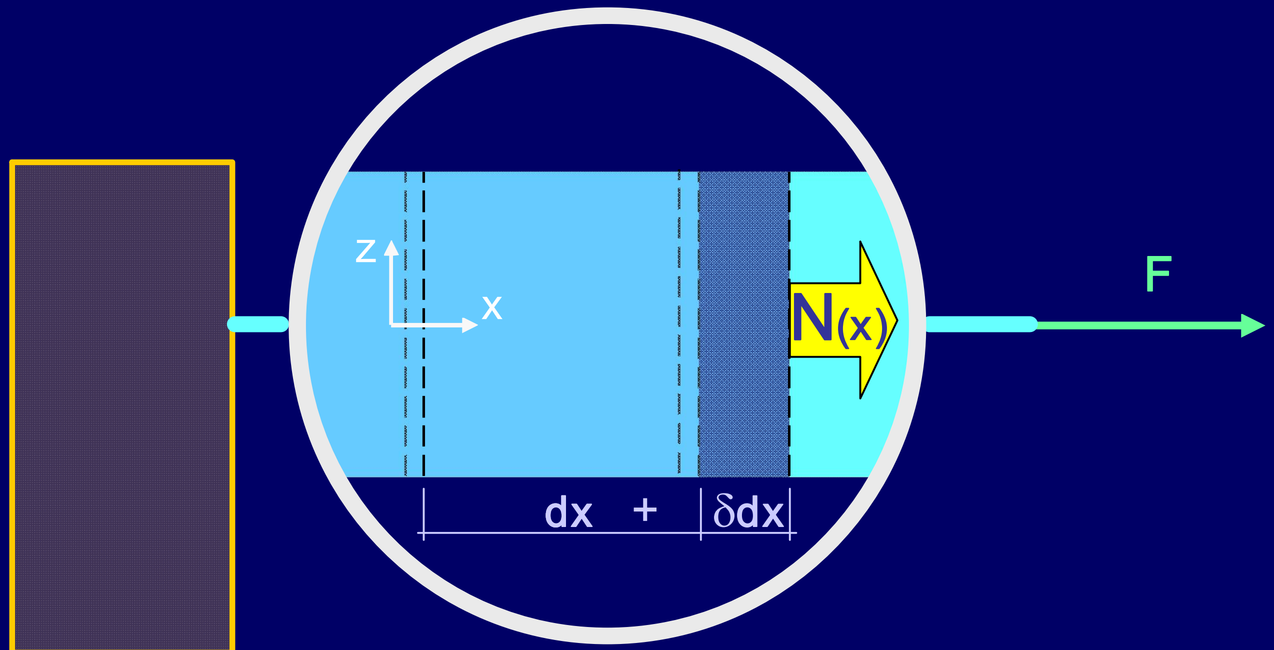
$$W = 1/2\ F\ \Delta$$

travail

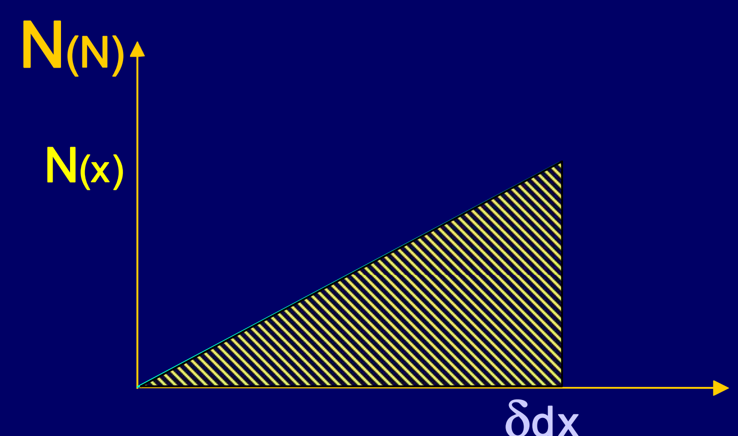




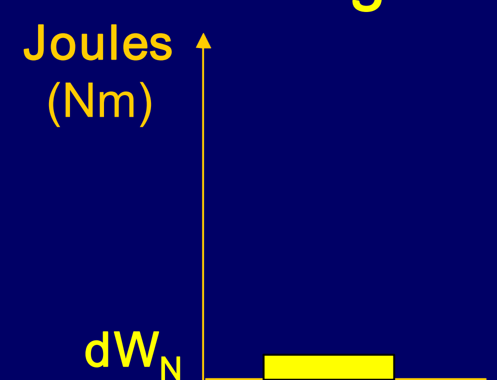
Travail élémentaire de l'action intérieure N



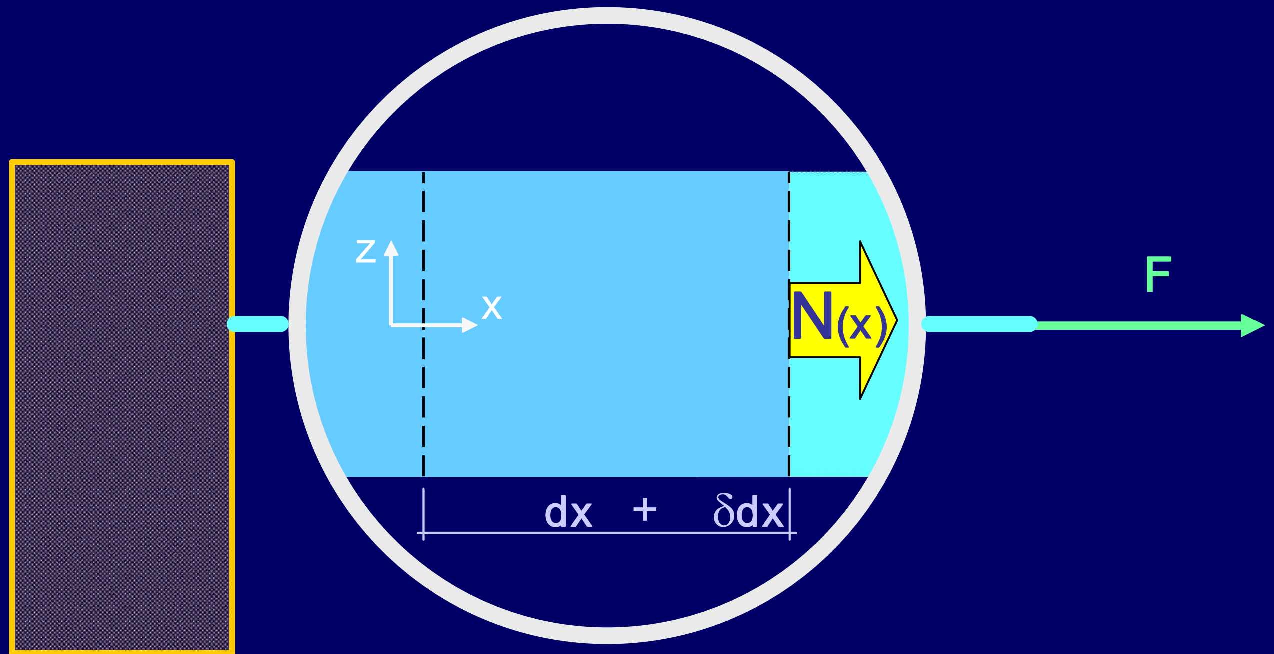
$$dW_N = 1/2\ N_{(x)}\ \delta dx$$



énergie



Travail élémentaire de l'action intérieure N



$$dW_N = 1/2\ N(x)\ \delta dx$$

$$= 1/2\ N(x)\ \varepsilon\ dx$$

$$= 1/2\ N(x)\ \frac{\sigma}{E}\ dx$$

$$= 1/2\ N(x)\ \frac{N(x)}{ES}\ dx$$

Déformation $\varepsilon = \dfrac{\delta dx}{dx}$

Loi de Hooke $\sigma = E\ \varepsilon$

Contrainte normale $\sigma = N/S$

Énergie élastique due à $N_{(x)}$

Travail élémentaire de l'effort intérieure $N_{(x)}$

$$dW_N = 1/2\ N_{(x)} \frac{N_{(x)}}{ES}\ dx$$

Énergie élastique due à l'effort normal

sur l'ensemble du système

$$W_N = 1/2 \int_0^L \frac{N^2_{(x)}}{ES}\ dx$$

avec L longueur de la poutre

Relation travail énergie

Travail de l'action appliquée : F

$$W = 1/2\ F\ \Delta$$

Force Déplacement

Énergie de déformation.

$$W_N = 1/2 \int_0^L \frac{N^2(x)}{E\ S}\, dx$$

$$W_N = 1/2 \int_0^L N(x)\ \varepsilon\ dx$$

Effort intérieur Déformation

Contribution extérieure $=$ Accumulation intérieure

Expression de l'énergie de déformation élastique due à l'effort normal.

$$W_N = 1/2 \int_0^L \frac{N^2(x)}{E\,S}\,dx$$

Généralisation aux différents efforts intérieurs

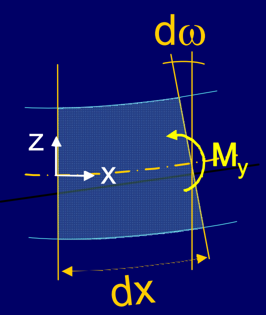
Effort intérieur

Moment de flexion

$M_y(x)$

Moment de flexion
par rapport à l'axe de flexion y

Déformation



$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{M_y(x)}{E\, I_y}$$

Energie élastique due à $M_y(x)$

$$W_{My} = 1/2 \int_0^L \frac{M_y^2(x)}{E\, I_y}\, dx$$

$$W_{My} = 1/2 \int_0^L M_y(x)\, \frac{M_y(x)}{E\, I_y}\, dx$$

Effort intérieur

Déformation

Généralisation aux différents efforts intérieurs

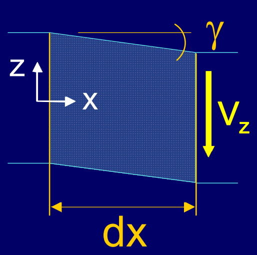
Effort intérieur

Effort tranchant

$V_z(x)$

Effort tranchant suivant l'axe z

Déformation



$$\gamma = \frac{V_z(x)}{G\, S_r}$$

S_r section réduite

Energie élastique due à $V_z(x)$

$$W_{Vz} = 1/2 \int_0^L \frac{V_z^2(x)}{G\, S_r}\, dx$$

$$W_{Vz} = 1/2 \int_0^L V_z(x)\, \frac{V_z(x)}{G\, S_r}\, dx$$

Effort intérieur

Déformation

Généralisation aux différents efforts intérieurs

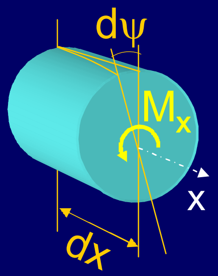
Effort intérieur

Moment de torsion

$M_x(x)$

Moment de torsion suivant l'axe x

Déformation



$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{M_x(x)}{G\,J}$$

Energie élastique due à $V_z(x)$

$$W_{Mx} = 1/2 \int_0^L \frac{M_x^2(x)}{G\,J}\,dx$$

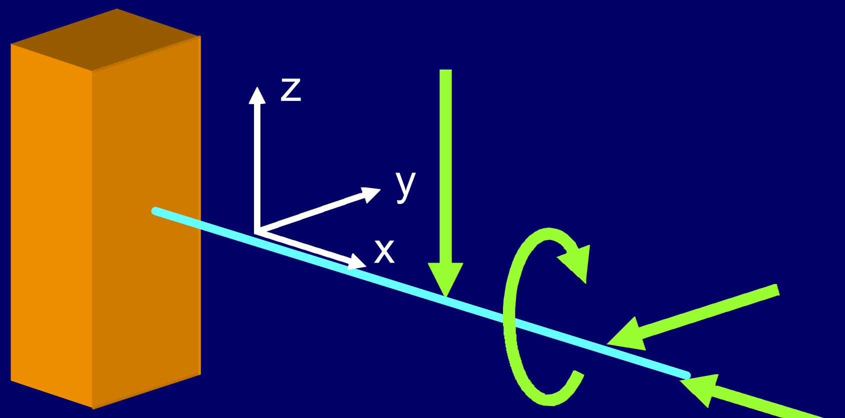
$$W_{Mx} = 1/2 \int_0^L \underbrace{M_x(x)}_{\text{Effort intérieur}} \underbrace{\frac{M_x(x)}{G\,J}}_{\text{Déformation}}\,dx$$

Généralisation

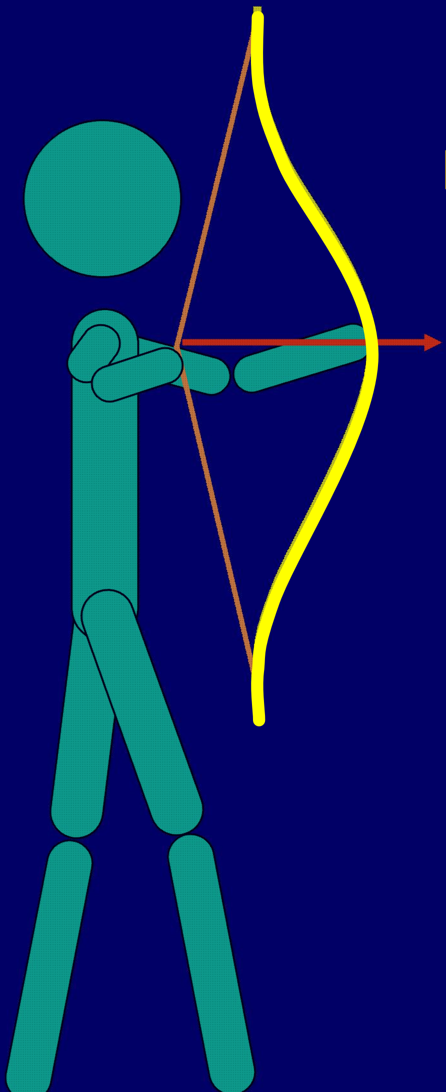
$$W = W_N + W_V + W_M$$

$$W = 1/2\left(\frac{N^2(x)}{E\,S} + \frac{V^2{}_y(x)}{G\,S_{ry}} + \frac{V^2{}_z(x)}{G\,S_{rz}} + \frac{M^2{}_x(x)}{G\,J} + \frac{M^2{}_y(x)}{E\,I_y} + \frac{M^2{}_z(x)}{E\,I_z}\right)$$

Pour un système complet de sollicitations



Bilan



En considérant l'arc

Le travail des actions extérieures = L'énergie de déformation élastique intérieure

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} T_i\, U_i = W_N + W_V + W_M$$