**Détermination du degré d'hyperstaticité :**

$$\boxed{D° = -\{3.b - (3.l_3 + 2.l_2 + 1.l_1)\}}$$

$\left\{\begin{array}{l} l_1\text{: liaisons appuis simples.} \\ l_2\text{: liaisons articulations.} \\ l_3\text{: liaisons encastrements.} \end{array}\right.$

**Si:** *d°> 0: système hyperstatique.*
*d° = 0: système isostatique.*
*d° < 0: système hypostatique (mécanisme).*

*<u>Indiquer</u> les repères locaux sur les barres (surtout pour les structures à plusieurs barres).*

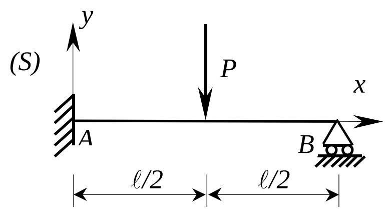
## *Cas d'une structure hyperstatique (d° > 0):*

**Structure isostatique associée :**
*Recherche d'une structure isostatique associée faisant apparaître le chargement sur la structure initiale et les inconnues hyperstatiques (autant d'inconnues que la valeur du degré hyperstatique).*

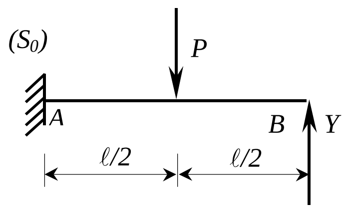
**Principe de superposition :**
*On applique le principe de superposition sur la structure isostatique associée ($S_0$) en décomposant suivant les différents chargements (les inconnues hyperstatiques étant des chargements).*

*Dans l'exemple:* $(S_0) = (S_1) + (S_2)$

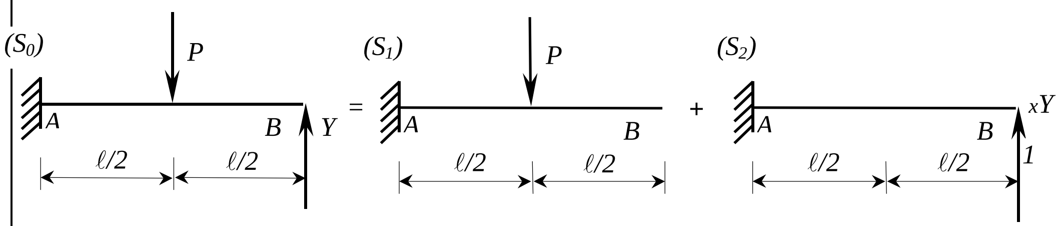
*Exemple d'une structure hyperstatique de degré1 :*




*1 liaison encastrement : 3 inconnues.*
*1 liaison appui simple : 1 inconnue.*
*1 barre : 3 équations.*
*D° = 1 x 3 + 0 x 2 + 1 x 1 – 3 x 1 = 1*
*La structure est hyperstatique de degré 1*




*$D_{\text{vertical en B}} = 0$ pour retrouver l'appui simple en B.*



**Conditions de déplacements (et rotations) :**

*On exprime les conditions de déplacements (et rotations) pour que la structure isostatique associée soit identique à la structure initiale (S).*
*Ce déplacement est ensuite exprimée à partir des structures de la décomposition par le principe de superposition.*

**Calcul des déplacements (et rotations):**

*Le calcul des déplacements (et des rotations) $D_{ij}$ et $d_{ij}$ passe par l'étude des différentes structures de la décomposition par le principe de superposition.*
*Le plus souvent, on néglige les travaux de déformations dues au travail de l'effort normal et au travail de l'effort tranchant devant le travail du moment fléchissant (cas courant où cette hypothèse n'est pas faite; barre bi-articulée).*
*En appliquant le théorème de la charge unité, on calcule chaque déplacement (et rotation).*
*Relation générale du théorème de la charge unité:*

$$D_{ij} = \int \frac{M_i \, \overline{M_j}}{EI} \, dx \qquad \overline{M_j} \text{ : moment dû à une charge unité.}$$

**Résolution du système:**

*La résolution du système peut se faire par substitution ou par combinaison linéaire entre les équations du système. Avant de commencer la résolution, effectuer toutes les simplifications possibles pour limiter les calculs.*

**« Résolution » de la structure:**

*Connaissant les inconnues hyperstatiques, il suffit d'écrire les équations d'équilibre de la structure initiale afin de déterminer toutes les réactions et moments éventuels sur appuis.*
*Le but étant de déterminer le torseur des efforts internes dans toute la structure ( N, V et $M_f$ pour une ossature plane) pour dimensionner ou vérifier les différentes sections.*

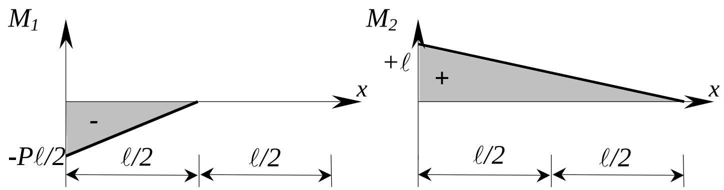
*Dans l'exemple: Déplacement vertical en B nul.*

$D_B = 0$

*Déplacem$^t$ en B = déplacem$^t$ sens effort 1 du à P + déplacem$^t$ sens effort 1 du à Y.*

$$D_B = 0 \quad = \quad D_{12} \quad + \quad d_{22} \quad . \quad Y$$

*Dans l'exemple, on néglige les déformations dues au travail de l'effort tranchant devant les déformations dues au travail du moment fléchissant.*
*On obtient pour les diagrammes des moments fléchissants:*




*Pour gagner du temps, on peut utiliser le tableau des Intégrales de Mohr qui donne des résultats simples pour les intégrales de moments qui reviennent fréquemment dans les structures.*

$$D_{12} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \left(\frac{-P\ell}{2}\right) \cdot \left(\frac{\ell}{2} + 2\ell\right) = -\frac{5P\ell^3}{48\,EI} \qquad \text{et} \qquad d_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \ell \cdot \ell \cdot \ell = \frac{\ell^3}{3\,EI}$$

*Dans l'exemple le système d'équations se résume à une seule équation :*

$$D_B = 0 = D_{12} + d_{22} \, . \, Y$$

$$\text{D'où } Y = -\frac{D_{12}}{d_{22}} = -\frac{-5P\ell^3}{48\,EI} \cdot \frac{3\,EI}{\ell^3} = +\frac{5P}{16}$$

*Dans l'exemple, l'inconnue hyperstatique Y est déterminée.*
*Les réactions et moment d'appui en A ont pour valeurs:*

$$X_A = 0 \quad , \qquad Y_A = P - \frac{5P}{16} = \frac{11P}{16} \quad , \qquad M_A = +P \cdot \frac{\ell}{2} - \frac{5P}{16} \cdot \ell = +\frac{3P\ell}{16}$$

*D'où les diagrammes d'effort tranchant et de moment fléchissant:*