# MÉTHODE DES DÉPLACEMENTS

**Discrétisation et inconnues cinématiques des nœuds:**

*La structure doit être décomposée en nœuds et en barres.*
*Chaque nœud comporte des degrés de liberté (ou variables cinématiques) qu'il faut indiquer pour chaque nœud.*

*Pour une ossature plane, il y a 3 degrés de liberté par nœud:* $\begin{cases} u\text{: déplacement horizontal} \\ v\text{: déplacement vertical} \\ \Omega\text{: rotation du nœud} \end{cases}$

*Au niveau des appuis, des valeurs peuvent être nulles:*

| | |
|---|---|
| *Appui simple:* | *$v = 0$. (appui roulant).* |
| *Articulation:* | *$u = 0$ et $v = 0$ (valable pour un appui simple bloqué en translation).* |
| *Encastrement:* | *$u = 0$, $v = 0$ et $\Omega = 0$.* |

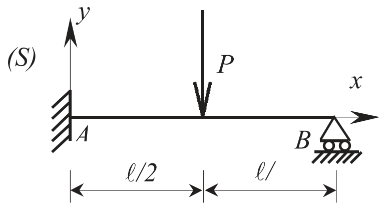
*Des degrés de liberté peuvent être liés entre eux suivant la géométrie et le chargement de la structure.*

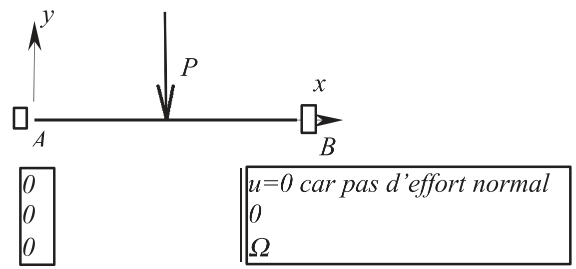
*Le nombre total de degrés de liberté inconnus et indépendants indique le nombre d'équations que comportera le système.*
*Donc, il est important de ne pas négliger cette phase qui conditionne tout le reste et peut éviter des calculs inutiles.*

**Efforts de liaisons:**

*Les efforts de liaisons $N_{ij}$, $N_{ji}$, $V_{ij}$, $V_{ji}$, $M_{ij}$, $M_{ji}$ sont déterminés à partir des équations établies pour une barre non chargée auxquelles il faut rajouter les $N^0$, $V^0$ et $M^0$ aux appuis produits par le chargement pour la barre bi-encastrée.*

*Exemple d'une structure hyperstatique de degré 1 :*




*Dans l'exemple, on obtient:*

$$V_{AB} = \frac{EI}{\ell^2}\cdot(0 + 6\Omega + 0) + \frac{P}{2} \qquad \text{et} \qquad M_{AB} = \frac{EI}{\ell}\cdot(0 + 2\Omega + 0) + P\frac{\ell}{8}$$

$$V_{BA} = -\frac{EI}{\ell^2}\cdot(0 + 6\Omega + 0) + \frac{P}{2} \qquad \text{et} \qquad M_{BA} = \frac{EI}{\ell}\cdot(0 + 4\Omega + 0) - P\frac{\ell}{8}$$

**Équilibre des nœuds :**

*L'équilibre des différents nœuds permet de liaisonner les équations des barres.*

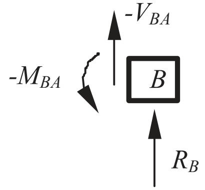
**Détermination des inconnues cinématiques:**

*A partir de l'équilibre des nœuds, on établit un système d'équations comportant autant d'inconnues cinématiques (degrés de libertés inconnus) que d'équations.*
*Ce système se résout par substitution ou par combinaison linéaire entre les équations.*

**Résolution de la structure:**

*Les inconnues cinématiques (ou degrés de liberté) étant déterminées, il ne reste plus qu'à déterminer les efforts à chaque extrémité des barres pour tracer les diagrammes de N, V, et $M_f$.*

*Dans l'exemple, l'équilibre du nœud B donne :*




$$R_B = V_{BA} \text{ et } \qquad M_{BA} = 0$$

*Dans l'exemple:*

$$M_{AB} = 0 = \frac{EI}{\ell}(4\Omega) - P\frac{\ell}{8} \qquad \text{donc} \qquad \Omega = +\frac{P\ell^2}{32\,EI}$$

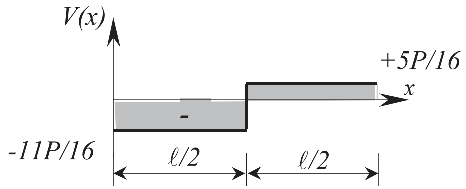
*Dans l'exemple:*

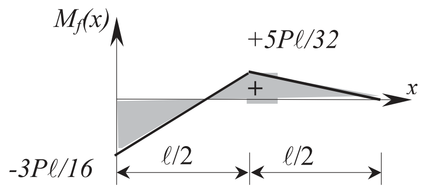
$$R_B = V_{BA} = -\frac{EI}{\ell^2}\left(6\cdot\frac{P\ell^2}{32\,EI}\right) + \frac{P}{2} = -\frac{3P}{16} + \frac{P}{2} = -\frac{3P}{16} + \frac{8P}{16} = +\frac{5P}{16}$$

$$V_{AB} = \frac{EI}{\ell^2}\left(6\cdot\frac{P\ell^2}{32\,EI}\right) + \frac{P}{2} = \frac{3P}{16} + \frac{P}{2} = \frac{3P}{16} + \frac{8P}{16} = +\frac{11P}{16}$$

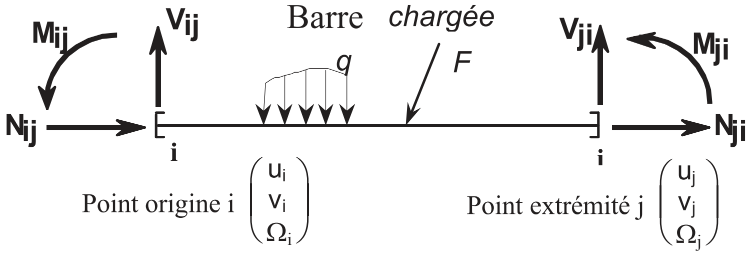
$$M_{AB} = \frac{EI}{\ell}\left(2\cdot\frac{P\ell^2}{32\,EI}\right) + P\frac{\ell}{8} = P\frac{\ell}{16} + P\frac{\ell}{8} = +\frac{3P\ell}{16}$$

*D'où les diagrammes de V et $M_f$:*



# *Méthode des déplacements*




Relations Efforts-Déplacements: $[F] = [K] . [D] + [F^0]$

*[ K ]:* matrice de rigidité de la barre (indépendante du chargement).

$$\begin{bmatrix} N_{ij} \\ V_{ij} \\ M_{ij} \\ N_{ji} \\ V_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \frac{EI}{\ell} \begin{bmatrix} \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{\ell^2} & \frac{6}{\ell} & 0 & -\frac{12}{\ell^2} & \frac{6}{\ell} \\ 0 & \frac{6}{\ell} & 4 & 0 & -\frac{6}{\ell} & 2 \\ -\frac{A}{I} & 0 & 0 & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell} & 0 & \frac{12}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell} \\ 0 & \frac{6}{\ell} & 2 & 0 & -\frac{6}{\ell} & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \Omega_i \\ u_j \\ v_j \\ \Omega_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N^0_{ij} \\ V^0_{ij} \\ M^0_{ij} \\ N^0_{ji} \\ V^0_{ji} \\ M^0_{ji} \end{bmatrix}$$

Équivalent au système:

$$\mathbf{N_{ij} = -\frac{EA}{\ell}(u_j - u_i) + N^0_{ij}}$$

$$\mathbf{V_{ij} = \frac{EI}{\ell^2}\left(6\Omega_i + 6\Omega_j - 12\,\frac{v_j - v_i}{\ell}\right) + V^0_{ij}}$$

$$\mathbf{M_{ij} = \frac{EI}{\ell}\left(4\Omega_i + 2\Omega_j - 6\,\frac{v_j - v_i}{\ell}\right) + M^0_{ij}}$$

$$\mathbf{N_{ji} = \frac{EA}{\ell}(u_j - u_i) + N^0_{ji}}$$

$$\mathbf{V_{ji} = -\frac{EI}{\ell^2}\left(6\Omega_i + 6\Omega_j - 12\,\frac{v_j - v_i}{\ell}\right) + V^0_{ji}}$$

$$\mathbf{M_{ji} = \frac{EI}{\ell}\left(2\Omega_i + 4\Omega_j - 6\,\frac{v_j - v_i}{\ell}\right) + M^0_{ji}}$$

**Formulaire barre bi-encastrée pour le calcul des $F^0$:**