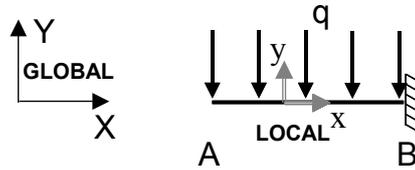


Méthode des déplacements

C'est une méthode de calcul sur ossature discrétisée (on isole successivement chacun de ses éléments). Dans la méthode des forces, les inconnues sont soit des actions extérieures statiquement indéterminées soit des actions intérieures de liaison. D'où le nom de méthode des forces. Dans la méthode des déplacements, les inconnues sont les composantes du vecteur déplacement de certains points de la structure, appelés nœuds. D'où le nom de méthode des déplacements. Cette méthode consiste donc à déterminer les composantes des déplacements de ces nœuds (u sur x , v sur y , Ω autour de z) sous forme d'un vecteur.

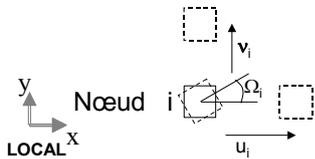
Présentation de la méthode



Partie 1 - Formulation du problème en fonction des déplacements aux extrémités A et B -

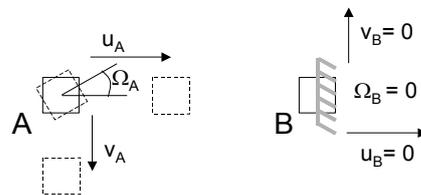
Degrés de liberté

Déplacements globaux d'un nœud exprimés suivant les directions locales x et y



Les valeurs u_i , v_i , Ω_i peuvent être positives ou négatives

Degrés de liberté du système (barre AB)

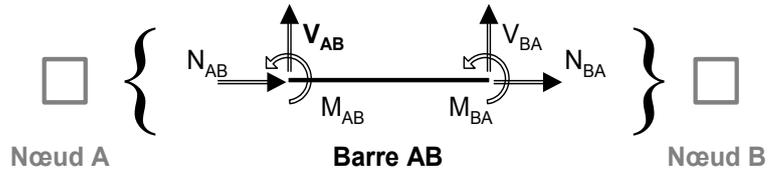


u_A , v_A , Ω_A 3 d° de liberté

Remarque : en l'absence de chargement longitudinal (sur X), le déplacement U_A est nul

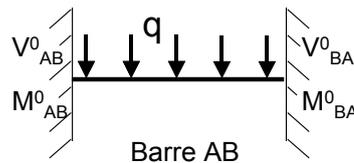
Etude de la barre isolée

Les actions Nœud sur Barre sont orientées arbitrairement. L'indice AB signifie action du nœud A sur la barre AB. Réciproquement BA signifie action du nœud B sur la barre AB.



Remarque: N_{AB} et N_{BA} sont, dans notre cas, nuls en l'absence de chargement longitudinal (sur X).

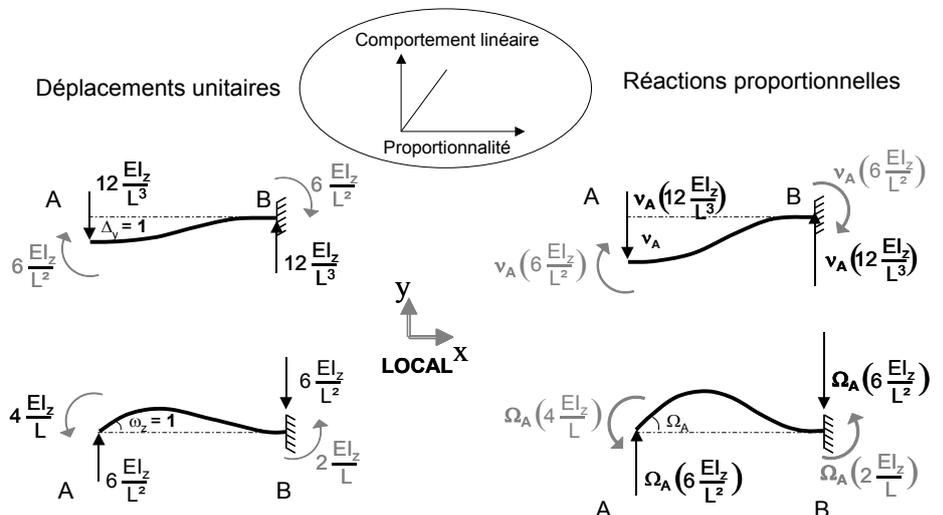
Actions sur la barre **privée de ses degrés de liberté** aux extrémités et soumise au chargement initial (0)



Actions sur la barre **privée de son chargement** initial, sous l'action des déplacements aux nœuds

V_A , V_B , Ω_A , Ω_B , Ω_C sont à priori inconnus mais les actions provoquées par ceux-ci sont proportionnelles à celles d'un système à déplacements unitaires.

L'étude des systèmes au point B conduit à des actions nulles car, dans le cas présent, tous les déplacements sont nuls en B.



Superposition des systèmes

a/ Actions de liaison au point A

Déplacements unitaires en A et composantes d'actions sur y local

Déplacements unitaires en B et composantes d'actions sur y local

Actions proportionnelles en A

$$V_{AB} = 6 \frac{E I_z}{L^2} \Omega_A + 6 \frac{E I_z}{L^2} \cdot \Omega_{B(=0)} + 12 \frac{E I_z}{L^3} v_A - 12 \frac{E I_z}{L^3} v_{B(=0)} + V_{AB}^0$$

Barre AB

Déplacements unitaires en A et composantes de moment sur z local

Déplacements unitaires en B et composantes de moment sur z local

Moments proportionnels en A

$$M_{AB} = 4 \frac{E I_z}{L^2} \Omega_A + 2 \frac{E I_z}{L^2} \Omega_{B(=0)} + 6 \frac{E I_z}{L^2} v_A - 6 \frac{E I_z}{L^2} v_{B(=0)} + M_{AB}^0$$

Barre AB

Ces 2 expressions sont des équations intrinsèques ou relations fondamentales. Elles proposent une formulation du problème en fonction des déplacements u_A, v_A, Ω_A et u_B, v_B, Ω_B (nuls en B dans notre étude) dans le repère local de la barre.

b/ Par analogie on en déduit les expressions au point B:

$$V_{BA} = -6 \frac{E I_z}{L^2} \Omega_A - 6 \frac{E I_z}{L^2} \cdot \Omega_{B(=0)} - 12 \frac{E I_z}{L^3} v_A + 12 \frac{E I_z}{L^3} v_{B(=0)} + V_{BA}^0$$

$$M_{BA} = 2 \frac{E I_z}{L^2} \Omega_A + 4 \frac{E I_z}{L^2} \Omega_{B(=0)} + 6 \frac{E I_z}{L^2} v_A - 6 \frac{E I_z}{L^2} v_{B(=0)} + M_{BA}^0$$

- Bilan partiel -

Nous venons de reformuler le problème en déplacements. Mais il n'est pas résolu pour autant !

Nous cherchons à déterminer les 2 inconnues de déplacements (v_A, Ω_A) par la résolution de 2 d'équations d'équilibre. Deux relations au nœud A, lieu des degrés de liberté étudiés. Par ailleurs, $N_{AB}^0, V_{AB}^0, M_{AB}^0$ et $N_{BA}^0, V_{BA}^0, M_{BA}^0$ ne sont pas inconnues. Elles sont données par un formulaire consacré aux différents chargements appliqués sur une poutre bi encastree.

Partie 2 – Relations d'équilibre –

Etude du nœud A isolé
 Les actions Barre sur Nœud sont égales et opposés au action Nœud sur Barre



Equilibre du nœud A
 dans le repère local barre

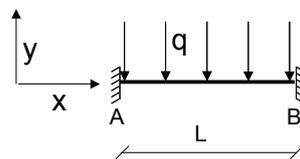
Actions d'un appuis ou d'une autre barre \rightleftarrows { **A** } \rightleftarrows Actions de la Barre AB sur A
 $-V_{AB}; -M_{AB}$

Equilibre sur y local : $-V_{AB} + 0 = 0$ alors $V_{AB} = 0$
 Equilibre sur z local : $-M_{AB} + 0 = 0$ alors $M_{AB} = 0$

Soit sur y local $6 \frac{Ez}{L^2} \Omega_A + 12 \frac{Ez}{L^3} v_A + V_{AB}^0 = 0$

et sur z local $4 \frac{Ez}{L} \Omega_A + 6 \frac{Ez}{L^2} v_A + M_{AB}^0 = 0$

Formulaire.



$$\begin{aligned} M_{AB}^0 &= \frac{qL^2}{12} \\ M_{BA}^0 &= -\frac{qL^2}{12} \\ V_{AB}^0 &= \frac{qL}{2} \\ V_{BA}^0 &= \frac{qL}{2} \end{aligned}$$

Le problème revient à résoudre le système :

(a) $6 \frac{Ez}{L^2} \Omega_A + 12 \frac{Ez}{L^3} v_A = -\frac{qL}{2}$

(b) $4 \frac{Ez}{L} \Omega_A + 6 \frac{Ez}{L^2} v_A = -\frac{qL^2}{12}$

Partie 3 – Résolution –

Le système est simple, on peut le résoudre par substitution :

(a) - 2 (b)/L : $-2 \frac{Ez}{L^2} \Omega_A = -\frac{qL}{2} + \frac{qL}{6} = -\frac{qL}{3}$ soit : $\Omega_A = \frac{qL^3}{6Ez}$

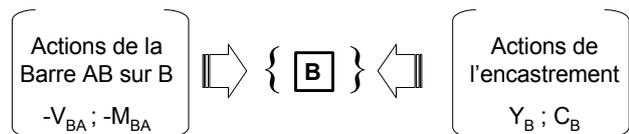
Par substitution dans (b) $6 \frac{Ez}{L^2} v_A = -4 \frac{Ez}{L} \frac{qL^3}{6Ez} - \frac{qL^2}{12}$ soit : $v_A = -\frac{qL^4}{8Ez}$

En incorporant ces expression dans les formules intrinsèques au point B, on montre que :

$V_{BA} = -6 \frac{Ez}{L^2} \frac{qL^3}{6Ez} - 12 \frac{Ez}{L^3} (-\frac{qL^4}{8Ez}) + V_{BA}^0 = qL$ sur x local barre

$M_{BA} = 2 \frac{Ez}{L} \frac{qL^3}{6Ez} + 6 \frac{Ez}{L^2} (-\frac{qL^4}{8Ez}) + M_{BA}^0 = -\frac{qL^2}{2}$ sur y local barre

Equilibre du nœud B
 dans le repère local barre

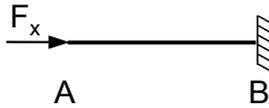


Equilibre sur y local : $-V_{BA} + Y_B = 0$ alors $Y_B = V_{BA}$

Equilibre sur z local : $-M_{BA} + C_B = 0$ alors $C_B = M_{BA}$

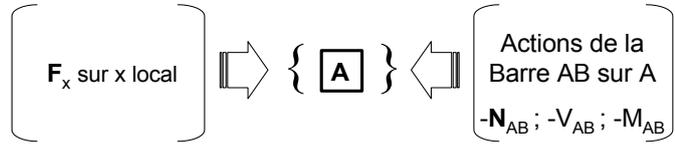
Dans notre cas, les expressions donnent directement les actions de liaison dans X, Y, Z global car il est identique au repère local.

Partie 4 – Cas d'une charge nodale sur x local –



Elle ne va figurer que dans l'équilibre du nœud A

Equilibre du nœud A
dans le repère local barre



Equilibre sur x local : $-N_{AB} + F_x = 0$ alors $N_{AB} = F_x$

Equilibre sur y local : $-V_{AB} + 0 = 0$ alors $V_{AB} = 0$

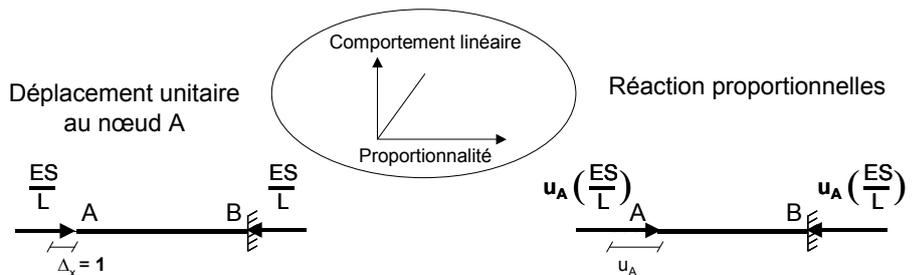
Equilibre sur z local : $-M_{AB} + 0 = 0$ alors $M_{AB} = 0$

Une nouvelle relation d'équilibre apparaît sur l'axe local x. Elle fait intervenir la composante N_{AB} de compression dans la barre.

Traitement des composantes N_{AB} et N_{BA} .

Actions sur la barre **privée de son chargement** initial, sous l'action du déplacement u_A au nœud A

u_A , u_B sont à priori inconnus mais les actions provoquées par ceux-ci sont proportionnelles à celles d'un système à déplacements unitaires.



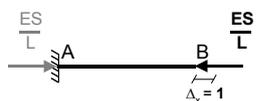
L'étude des systèmes au point B conduit à des actions nulles car, dans le cas présent, tous les déplacements sont nuls en B.

a/ Actions de liaison au point A

Déplacement unitaire en A et composantes d'actions sur x local



Déplacements unitaires en B et composantes d'actions sur x local



F n'apparaît pas sur la barre isolée car elle s'applique au nœud A

Actions proportionnelles en A

$$N_{AB} = \frac{ES}{L} u_A + N_{AB}^0 = 0$$

Par analogie en B

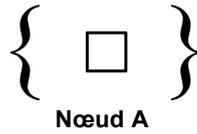
Actions proportionnelles en B

$$N_{BA} = -\frac{ES}{L} u_B (=0) + N_{BA}^0 = 0$$

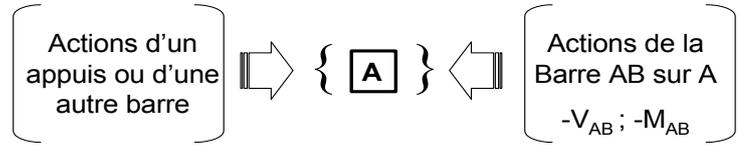
Soit sur y local $6 \frac{Ez}{L^2} \Omega_A + 12 \frac{Ez}{L^3} V_A + V_{AB}^0 = 0$

Etude du nœud A isolé

Les actions Barre sur Nœud sont égales et opposés au action Nœud sur Barre



Equilibre du nœud A
dans le repère local barre



Equilibre sur y local : $-V_{AB} + 0 = 0$ alors $V_{AB} = 0$

Equilibre sur z local : $-M_{AB} + 0 = 0$ alors $M_{AB} = 0$

Soit sur y local $6 \frac{Ez}{L^2} \Omega_A + 12 \frac{Ez}{L^3} v_A + V_{AB}^0 = 0$

$$\begin{array}{c}
 F \\
 -\frac{qL}{2} \\
 -\frac{qL^2}{12} \\
 -F \\
 qL - \frac{qL}{2} \\
 -\frac{qL^2}{2} + \frac{qL^2}{12}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \frac{ES}{L} \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{ES}{L} \quad 0 \quad 0 \\
 0 \quad 12 \frac{Ez}{L^3} \quad 6 \frac{Ez}{L^2} \quad 0 \quad -12 \frac{Ez}{L^3} \quad 6 \frac{Ez}{L^2} \\
 0 \quad 6 \frac{Ez}{L^2} \quad 4 \frac{Ez}{L} \quad 0 \quad -6 \frac{Ez}{L^2} \quad 2 \frac{Ez}{L} \\
 -\frac{ES}{L} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{ES}{L} \quad 0 \quad 0 \\
 0 \quad -12 \frac{Ez}{L^3} \quad -6 \frac{Ez}{L^2} \quad 0 \quad 12 \frac{Ez}{L^3} \quad -6 \frac{Ez}{L^2} \\
 0 \quad 6 \frac{Ez}{L^2} \quad 2 \frac{Ez}{L} \quad 0 \quad -6 \frac{Ez}{L^2} \quad 4 \frac{Ez}{L}
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{c}
 u_A \\
 v_A \\
 \Omega_A \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array}$$

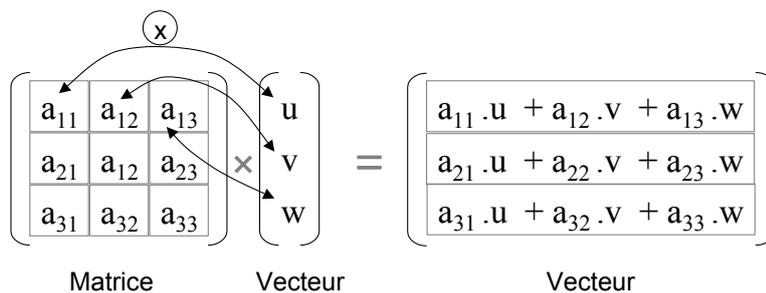
Soit encore sous forme d'équations indépendantes.

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{ES}{L} u_A \\
 -\frac{qL^2}{12} &= 6 \frac{Ez}{L^2} v_A + 4 \frac{Ez}{L} \Omega_A \\
 \frac{qL}{2} &= -12 \frac{Ez}{L^3} v_A - 6 \frac{Ez}{L^2} \Omega_A \\
 -\frac{5qL^2}{12} &= 6 \frac{Ez}{L^2} v_A + 2 \frac{Ez}{L} \Omega_A
 \end{aligned}$$

Soit : $\Omega_A =$

Partie 2 – Ecriture matricielle des relations fondamentales –

Rappel : multiplication d'une matrice par un vecteur



On peut alors exprimer l'ensemble des relations par :

$$\begin{array}{c}
 N_{AB} \\
 V_{AB} \\
 M_{AB} \\
 N_{BA} \\
 V_{BA} \\
 M_{BA}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \boxed{
 \begin{array}{cccccc}
 \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 12\frac{Elz}{L^3} & 6\frac{Elz}{L^2} & 0 & -12\frac{Elz}{L^3} & 6\frac{Elz}{L^2} \\
 0 & 6\frac{Elz}{L^2} & 4\frac{Elz}{L} & 0 & -6\frac{Elz}{L^2} & 2\frac{Elz}{L} \\
 -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\
 0 & -12\frac{Elz}{L^3} & -6\frac{Elz}{L^2} & 0 & 12\frac{Elz}{L^3} & -6\frac{Elz}{L^2} \\
 0 & 6\frac{Elz}{L^2} & 2\frac{Elz}{L} & 0 & -6\frac{Elz}{L^2} & 4\frac{Elz}{L}
 \end{array}
 }
 \times
 \begin{array}{c}
 u_A \\
 v_A \\
 \Omega_A \\
 u_B \\
 v_B \\
 \Omega_B
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 N_{AB}^0 \\
 V_{AB}^0 \\
 M_{AB}^0 \\
 N_{BA}^0 \\
 V_{BA}^0 \\
 M_{BA}^0
 \end{array}$$

(F) efforts extérieurs = [K] matrice de rigidité . (D) déplacements aux nœuds + (F°)

Cette formulation matricielle est particulièrement bien adaptée au calcul automatique sur machine informatique.

En effet, pour déterminer les composantes du vecteur déplacement (D) il suffira de réaliser l'opération :

$$[K]^{-1} \{(F)-(F^0)\} = (D)$$

dans laquelle [K]⁻¹ est l'inverse de la matrice de rigidité ou encore, la matrice de souplesse. Ce type de transformation est bien adapté au calcul informatique.