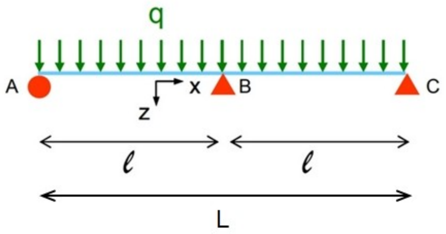
Résolution d'un problème hyperstatique de degrés 1 par la méthode des forces



q = 40 KN/m = 4.10^4 N/m IPE 100 $I_{fort} = 1{,}5919.10^{-7}$ m^4

E= 210 000 MPa = $2{,}1.10^{11}$ N/m² L = 2 m ℓ = 1 m

1/ Identifiez le degré de stabilité.

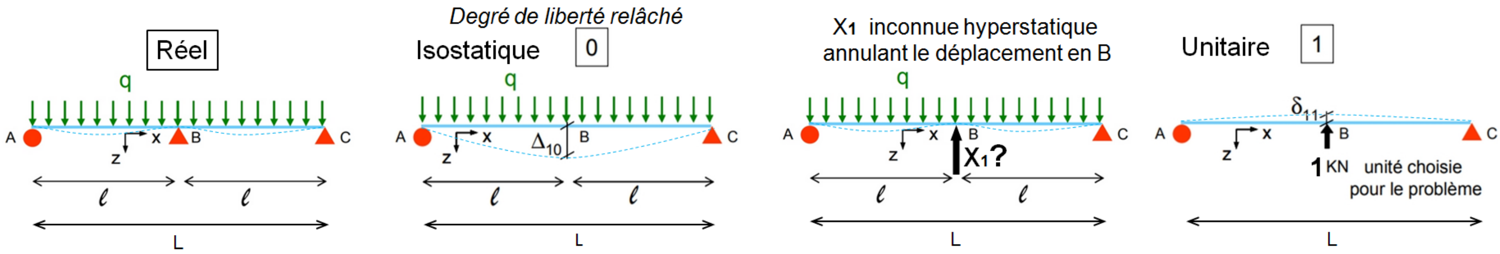
Cours de première année.

2/ Libérez un degré de liberté *(pour un hyperstatisme de degré 1)*

3/ Représentez les systèmes isostatique associé $\boxed{0}$ **et unitaire associé** $\boxed{1}$

$\boxed{0}$ *Chargement réel sans le degré bloqué initial*

$\boxed{1}$ *Chargement unitaire au lieu et dans la direction du degré bloqué initial. Le sens importe peu, un résultat final négatif signifiera que l'action est orientée en sens inverse.*



4/ Mettez en place les notations :

X_1 : inconnue hyperstatique d'appui en B

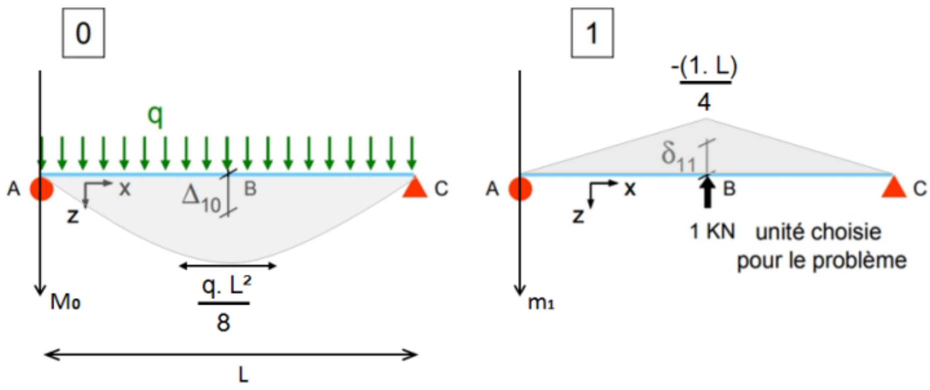
Δ_{10} : déplacement compatible au lieu et dans la direction de l'inconnue X_1 sous le chargement $\boxed{0}$

δ_{11} : déplacement compatible au lieu et dans la direction de l'inconnue X_1 sous le chargement $\boxed{1}$

6/ Indiquez l'objet de la résolution :

$$X_1 = \frac{-\Delta_{10}}{\delta_{11}}$$

7/ Construisez les diagrammes des moments de flexion de chaque système :



8/ Rappelez le résultat : $\Delta_{10} = \int_0^L M_0 \frac{m_1}{EI} dx$ *(pour la flexion)*

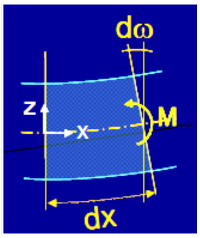
<u>Le paragraphe suivant n'est qu'un rappel de démonstration. Il n'est pas nécessaire lors de votre rédaction.</u>

L'application du Principe du travail virtuel associé à l'équivalence: travail extérieur d'une action et énergie de déformation élastique due aux efforts intérieurs nous donnent :

$$\frac{1}{2}.1.\Delta_{10} = \frac{1}{2}\int_0^L M_0\, d\omega_1$$

Résolution d'un problème hyperstatique de degrés 1 par la méthode des forces

Le travail virtuel de l'<u>action</u> unitaire 1 dans le <u>déplacement compatible</u> Δ_{10} *au lieu et dans la direction de 1 sous le chargement 0 et égal à l'énergie de déformation élastique due aux <u>efforts intérieurs</u> du système 0 dans les <u>déformations</u> du système 1. Pour une poutre en appui et suffisamment « loin de ces appuis », l'effort intérieur dominant dans ses effets, est le moment de flexion.*



Donc la déformation principale est celle due à la flexion, ou encore, la variation de la rotation des sections $d\omega_1$ *. On montre que cette déformation de flexion est liée au moment de flexion par* $d\omega_1 = \frac{m_1}{EI} dx$.

Considérant que M0 et m1sont des fonctions variables le long de l'élément, la relation doit s'écrire :

$$\frac{1}{2}.1.\Delta_{10} = \frac{1}{2}\int_0^L M_0(x).\frac{m_1(x)}{EI}\,dx\ .$$

Si l'élément est constitué d'un <u>même matériau</u> et que son <u>inertie est constante</u>, il est possible d'extraire le rapport $\frac{1}{EI}$ *constant, de la somme intégrale et d'obtenir la relation :*

$\frac{1}{2}.1.\Delta_{10} = \frac{1}{2}.\frac{1}{EI}\int_0^L M_0(x).m_1(x)\,dx$. *En simplifiant par ½ le problème devient :*

$1.\Delta_{10} = \frac{1}{EI}\int_0^L M_0(x).m_1(x)\,dx$. *Nous conservons la multiplication par 1 (charge unitaire en Newton) pour que la relation soit homogène. Soit, 1 en* N, Δ_{10} *en* m, E *en* Mpa, I en m^4, M_0 *et* m_1 *en* Nm.

Vérifions :

$$1.\Delta_{10} = \frac{1}{EI}\int_0^L M_0(x).m_1(x)\,dx$$

$$N.m = \frac{1}{MPa\,.\,m^4}.Nm.Nm.\mathbf{m}$$

<u>dx</u> a la dimension d'une longueur

De plus MPa $= \frac{N}{m^2}$. *On peut donc simplifier le rapport* $\frac{Nm.Nm}{\frac{N}{m^2}.m^4}.m$ *par* $\frac{Nm.Nm}{Nm^2}.m$ *qui devient* $\frac{Nm.Nm}{Nm}$ *donc bien homogène à des* Nm. *Enfin, la somme intégrale* $\int_0^L ..dx$ *produira le terme* L *lors de l'intégration, ce qui expliquera la multiplication par* $\frac{L}{EI}$ *dans le tableau des intégrales de MOHR qui donne les résultats des intégrales :* $\frac{1}{L}\int_0^L M(x).m(x)\,dx$.

9/ Rappelez le résultat : $\delta_{11} = \int_0^L m_1\frac{m_1}{EI}dx$ (*pour* la *flexion*)

L'équivalence: travail d'une action extérieure et énergie de déformation élastique due aux efforts intérieurs s'exprime par : $\frac{1}{2}1.\delta_{11} = \frac{1}{2}\int_0^L m_1\frac{m_1}{EI}dx$

10/ Utilisez le tableau des intégrales de MOHR

Ce tableau contient les résultats du calcul des intégrales de produits de fonctions utiles en mécanique des structures. Considérons l'intégrale du produit des fonctions M(x), parabolique et m(x), triangulaire. Le résultat se trouve à l'intersection de la ligne et de la colonne de ces formes de fonction. Il faut connaître leurs <u>valeurs maximum</u> et le <u>signe</u> de ces valeurs sur la longueur ℓ *de l'élément étudié. Le résultat est à multiplier par* $\frac{\ell}{EI}$ *pour une sollicitation de flexion. Dans le cas étudié, il n'est pas nécessaire de décomposer l'étude sur les demi-tronçons de longueur* ℓ *car nous disposons du résultat direct sur toute la longueur* L *de la poutre.*

Extrait du tableau proposé au BTS 2016

à multiplier par $\frac{\ell}{EI}$ pour M_f, $\frac{\ell}{EA}$ pour N, ou $\frac{\ell}{GA_r}$ pour V. Intégrales de MOHR $\frac{1}{\ell}\int_0^\ell M(x)m(x)dx$

ℓ = longueur du tronçon d'intégration.

M(x) \ m(x)	m, ℓ	m	m	m_g, m_t, m_d, $\ell/2$, $\ell/2$	m, $\ell/2$, $\ell/2$	m, $\alpha\ell$, $\beta\ell$, $\alpha+\beta=1$
M, ℓ	Mm	$\frac{1}{2}$Mm	$\frac{1}{2}$Mm	$\frac{1}{2}M(m_g+m_d)$	$\frac{1}{2}$Mm	$\frac{1}{2}$Mm
M, $\ell/2$, $\ell/2$, ou, M	$\frac{1}{2}$Mm	$\frac{1}{4}$Mm	$\frac{1}{4}$Mm	$\frac{1}{4}M(m_g+m_d)$	$\frac{1}{3}$Mm	$\frac{1}{12}Mm(3-4\alpha^2)/\beta$
M, $\alpha\ell$, $\beta\ell$, ou, M, $\alpha+\beta=1$	$\frac{1}{2}$Mm	$\frac{1}{6}Mm(1+\alpha)$	$\frac{1}{6}Mm(1+\beta)$	$\frac{1}{6}M[m_g(1+\beta)+m_d(1+\alpha)]$	$\frac{1}{12}Mm(3-4\alpha^2)/\beta$	$\frac{1}{3}$Mm
M, ou, M	$\frac{2}{3}$Mm	$\frac{1}{3}$Mm	$\frac{1}{3}$Mm	$\frac{1}{3}M(m_g+m_d)$	$\frac{5}{12}$Mm	$\frac{1}{3}Mm(1+\alpha\beta)$

11/ Appliquez les formules du tableau en les multipliant par L/EI pour la flexion

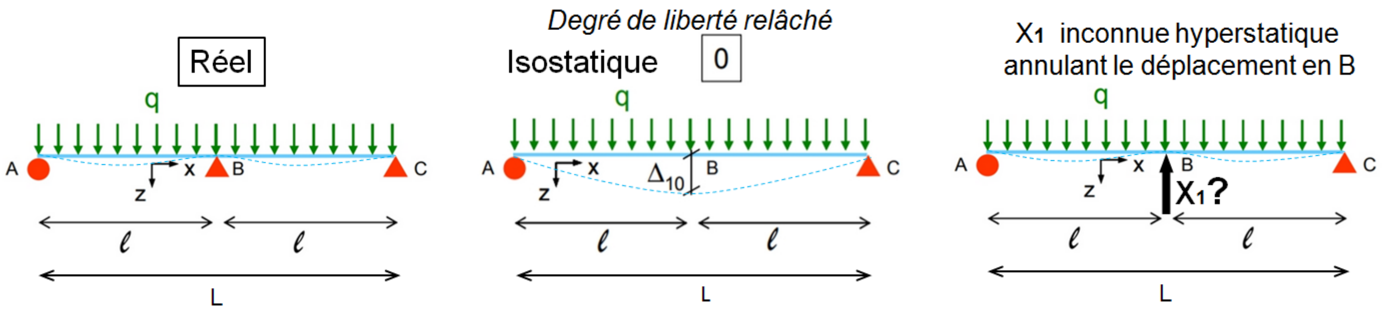
$$\Delta_{10} = \frac{L}{EI}\,\frac{5}{12}\left(\frac{qL^2}{8}\right)\left(\frac{-1.L}{4}\right) = -\,\frac{5.qL^4}{384\ EI} \qquad \delta_{11} = \frac{L}{EI}\,\frac{1}{3}\left(\frac{-1.L}{4}\right)\left(\frac{-1.L}{4}\right) = \frac{L^3}{48\ EI}$$

$$X_1 = \frac{-\Delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{-5.q.L^4/384\ EI}{L^3/48\ EI} = \frac{5qL}{8} = \frac{5ql}{4} \text{ avec } L=2l$$

Application numérique en unités standard N, m, MPa (10^6 N/m²) et m^4

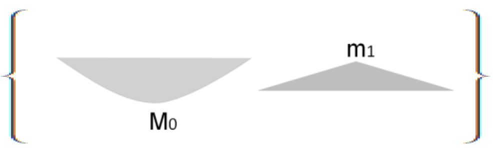
$X_1 = 1{,}25\ q\,\ell$ - 1,25 Coefficient d'appui hyperstatique

Rédaction synthétique :



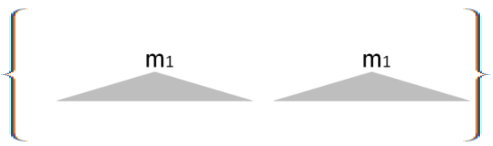
⟶ Tableau de MOHR

$$\Delta_{10} = \frac{L}{EI}$$



$$\Delta_{10} = \frac{L}{EI}\,\frac{5}{12}\left(\frac{qL^2}{8}\right)\left(\frac{-1.L}{4}\right) = -\,\frac{5.qL^4}{384\ EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{L}{EI}$$



$$\delta_{11} = \frac{L}{EI}\,\frac{1}{3}\left(\frac{-1.L}{4}\right)\left(\frac{-1.L}{4}\right) = \frac{1.L^3}{48\ EI}$$

Unités standard : 1 en N, Δ_{10} en m, δ_{11} en m, E en Mpa (N/m²), I en m^4, M_0 et m_1 en Nm.

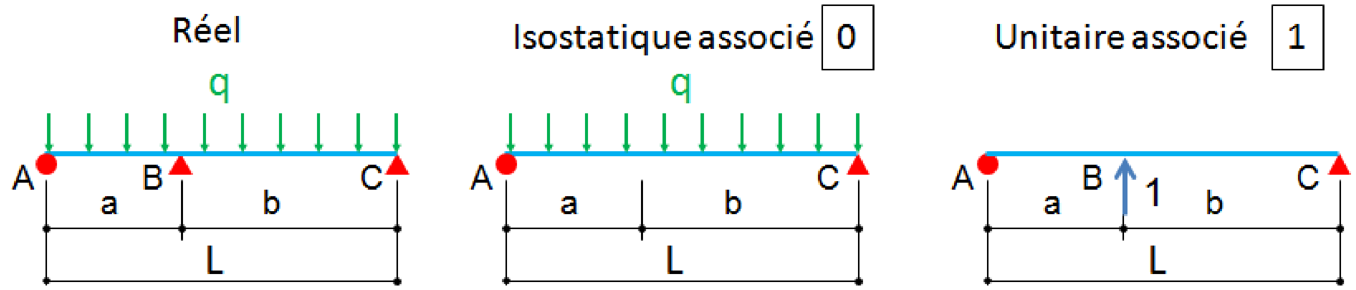
$$X_1 = \frac{-\Delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{-5.q.L^4/384\ EI}{L^3/48\ EI} = \frac{5qL}{8} = \frac{5q2\ell}{8} = \frac{5q\ell}{4} \quad 50\text{ KN} \qquad \text{avec } L = 2.\ell$$

$R_B = 1{,}25\ q\,\ell$ *ℓ distance entre 2 appuis. 1,25 coeff. d'appui hyperstatique*

Vous pouvez maintenant mieux comprendre ***cet article***

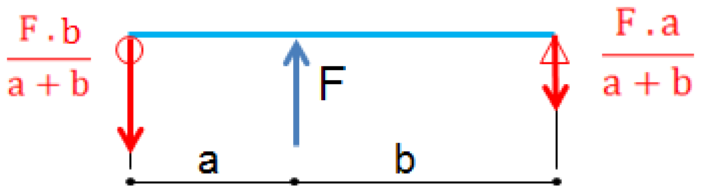
Résolution d'un problème hyperstatique de degrés 1 par la méthode des forces

Variante du problème symétrique.



1/ Calculer les réactions d'appui du système unitaire $\boxed{1}$

Résultats à retenir :

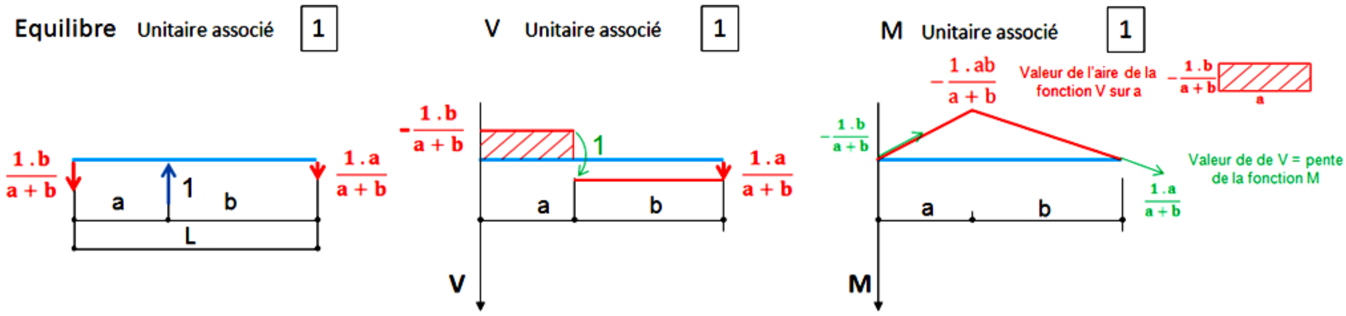


dans notre cas

$$R_A = \frac{1 . b}{a+b} \quad ; \quad R_C = \frac{1 . a}{a+b}$$

La valeur des appuis est fonction du rapport F/(a+b). La réaction la plus importante est proche de F, donc proportionnelle à la grande longueur b. La réaction la plus faible est alors proportionnelle à la petite longueur a.

2/ Construisez les diagrammes du système unitaire.



3/ Tableau de MOHR (extrait).

M(x) \ m(x)	m (rectangle, ℓ)	triangle m (droite)	triangle m (gauche)	trapèze m_g, m_t, m_d ($\ell/2$, $\ell/2$)	triangle m ($\ell/2$, $\ell/2$)	triangle m ($\alpha\ell$, $\beta\ell$, $\alpha+\beta=1$)
M (rectangle, ℓ)	Mm	$\frac{1}{2}$Mm	$\frac{1}{2}$Mm	$\frac{1}{2}M(m_g + m_d)$	$\frac{1}{2}$Mm	$\frac{1}{2}$Mm
triangle M ou triangle M	$\frac{1}{2}$Mm	$\frac{1}{3}$Mm	$\frac{1}{6}$Mm	$\frac{1}{6}M(m_g + 2m_d)$	$\frac{1}{4}$Mm	$\frac{1}{6}Mm(1+\alpha)$
parabole M ou parabole M	$\frac{2}{3}$Mm	$\frac{1}{3}$Mm	$\frac{1}{3}$Mm	$\frac{1}{3}M(m_g + m_d)$	$\frac{5}{12}$Mm	$\frac{1}{3}Mm\,(1+\alpha\beta)$
triangle M ($\alpha\ell$, $\beta\ell$, $\alpha+\beta=1$) ou triangle M	$\frac{1}{2}$Mm	$\frac{1}{6}Mm(1+\alpha)$	$\frac{1}{6}Mm(1+\beta)$	$\frac{1}{6}M[m_g\,(1+\beta) + m_d\,(1+\alpha)]$	$\frac{1}{12}Mm\,(3 - 4\alpha^2)/\beta$	$\frac{1}{3}$Mm

Résultats de l'étude mécanique : $M_0 = \frac{qL^2}{8}$ $\quad m_1 = \frac{-1 . ab}{a+b}$

Résolution d'un problème hyperstatique de degrés 1 par la méthode des forces

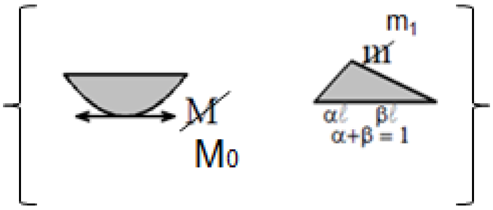
Attention !! dans le tableau : **a = αL** et **b = βL** pour une étude sur un domaine de longueur L (*noté ℓ dans le tableau*). Pour appliquer correctement les formules,

calculez d'abord α et β α = a/L = 2/5 = 0,4 ; β = b/L = 3/5 = 0,6

Notations : pour Δ_{10} : M correspond à M_0 et m correspond à m_1

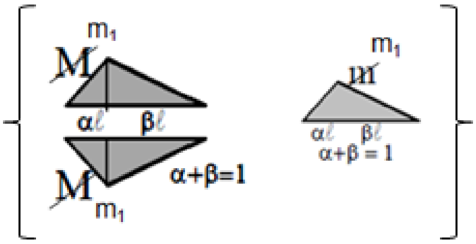
pour δ_{11} : M correspond à m_1 et m correspond à m_1

$\Delta_{10} = \frac{L}{EI}$



soit $\Delta_{10} = \frac{L}{EI}\,\frac{1}{3}\left(\frac{qL^2}{8}\right)\left(\frac{-1.a.b}{a+b}\right)(1+\alpha\beta)$

$\delta_{11} = \frac{L}{EI}$



soit $\delta_{11} = \frac{L}{EI}\,\frac{1}{3}\left(\frac{-1.ab}{a+b}\right)\left(\frac{-1.ab}{a+b}\right) = \frac{L.a^2.b^2}{3\ EI(a+b)^2}$

Application numérique : convertir toutes les valeurs dans le système international

IPE 200, a= 2m ; b= 3m ; L= a+b = 5m

Unités standard: 1(*unitaire*) en N, Δ_{10} en m, δ_{11} en m, E en Mpa (10^6N/m²), I en m^4, M_0 et m_1 en Nm.

E=210000 MPa = 2,1. 10^5. 10^6 N/m² = 2,1. 10^{11} N/m² (*M : Méga = 10^6*)

I= 1943.68 cm^4 = 1943,68 $(10^{-2}\ m)^4$ = 1943,68.10^{-8} m^4

E.I = 4081728 Nm²

q= 15 KN/m = 15.10^3 N/m

$$\Delta_{10} = \frac{L}{EI}\,\frac{1}{3}\left(\frac{qL^2}{8}\right)\left(\frac{-1.a.b}{a+b}\right)(1+\alpha\beta) = \frac{5}{4081728}\,\frac{1}{3}\left(\frac{15.10^3.5^2}{8}\right)\left(\frac{-1.2.3}{2+3}\right)(1+0{,}4.0{,}6)$$

$$\delta_{11} = \frac{L}{EI}\,\frac{1}{3}\left(\frac{-1.ab}{a+b}\right)\left(\frac{-1.ab}{a+b}\right) = \frac{L.a^2.b^2}{3\ EI(a+b)^2} = \frac{5.2^2.3^2}{3\,.\,4081728.(2+3)^2}$$

$$X_1 = \frac{-\Delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{-0{,}028480585}{5{,}87986.10^{-7}}$$ = **48437,52232 N** rdmLeMans : **48437,5 N**