TP d'énergétique N°2

Nous allons valider l'utilisation combinée de deux principes de la mécanique pour la détermination d'une inconnue hyperstatique.

Le principe des travaux virtuels (forme appliquée).

Chargement X_1

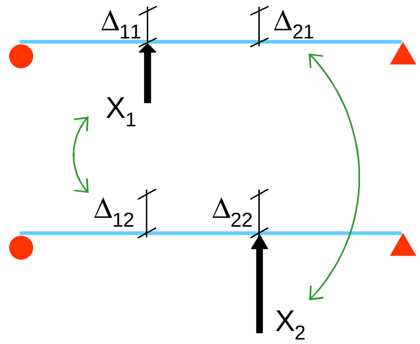
Déplacement Δ_{11}

Lieu et direction de X_1

Chargement X_2

Déplacement compatible Δ_{12}

Lieu et direction de X_1



Le **travail** de X_1 dans le déplacement compatible Δ_{12} sous le chargement X_2 $\quad \frac{1}{2} X_1 \cdot \Delta_{12}$

est égal au

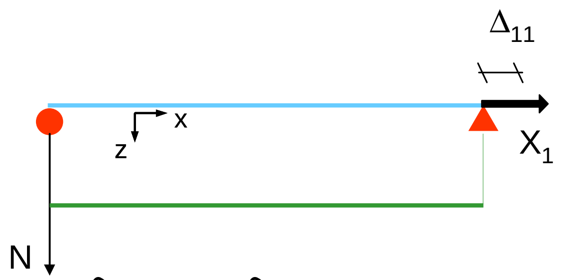
travail de X_2 dans le déplacement compatible Δ_{21} sous le chargement X_1 $\quad \frac{1}{2} X_2 \cdot \Delta_{21}$

Le principe d'équivalence

« L'énergie de déformation élastique est égale au travail des actions extérieures »

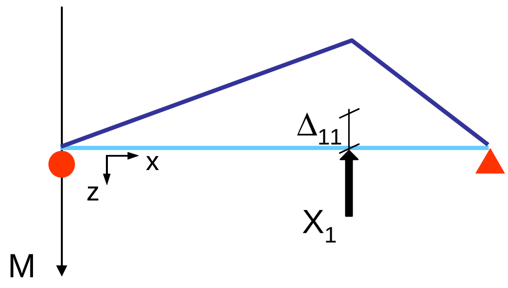
$$\frac{1}{2}\int_{Barre} \text{Effort intérieur} \cdot \text{Déformation élastique} = \frac{1}{2}\,\text{Action extérieure} \cdot \text{Déplacement}$$

Traction



$$\frac{1}{2}\int_{Barre} N.\varepsilon = \frac{1}{2}\int_{Barre} N.\frac{N}{EA} = \frac{1}{2}\,X_1\,\Delta_{11}$$

Flexion



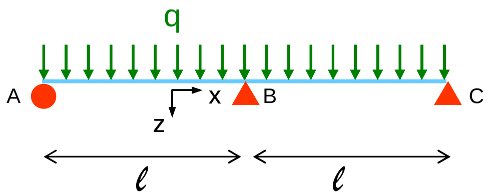
$$\frac{1}{2}\int_{Barre} M.\omega = \frac{1}{2}\int_{Barre} M.\frac{M}{EI_y} = \frac{1}{2}\,X_1\,\Delta_{11}$$

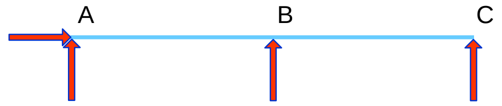
Lorsque E, A et I_y sont constants le long d'une barre on calculera

$$\frac{L_{Barre}}{EA}\int_{Barre} N.N \quad \text{ou} \quad \frac{L_{Barre}}{EI_y}\int_{Barre} M.M$$

à l'aide du tableau des intégrales de Mohr

Etude d'un système initial hyperstatique extérieurement de degré 1

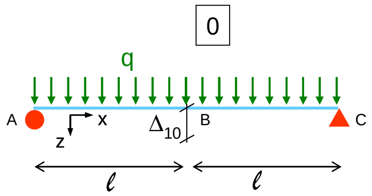


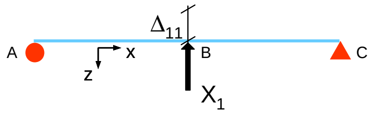


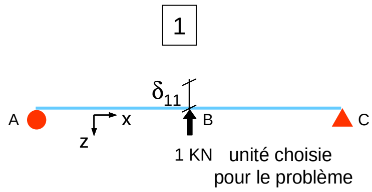
1 / Nous allons définir **un système isostatique associé** $\boxed{0}$ dans lequel nous **ajoutons un degré de liberté**.

2/ Dans un système identique mais **<u>sans</u> le chargement initial**, nous définissons une **inconnue principale de liaison** que nous noterons **X_1 compatible avec ce nouveau degré de liberté**.

3/ Nous définissons ensuite un **système à chargement unitaire** $\boxed{1}$ **correspondant à cette inconnue principale.** Nous choisissons de traiter ce problème en KN, donc cette action vaut 1 KN





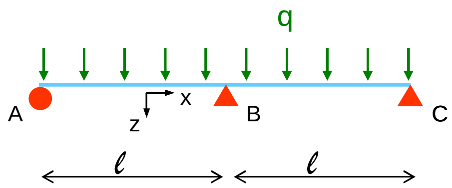


Etude des réactions d'appui sur le système initial

L = 2m

Profil IPE 100

Chargement : q = 40 KN/m



Extraire des résultats du logiciel la valeur de la réaction en B

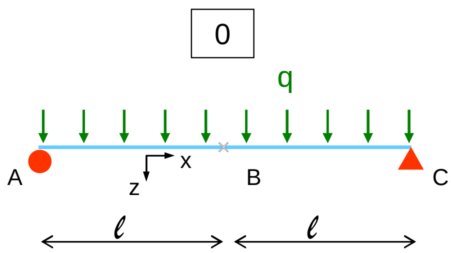
Donnez cette valeur à **X_1** : **X_1 =** **KN**

Etude des chargements sur le système isostatique associé

L = 2m

Profil IPE 100

Chargement : q = 40 KN/m



Dans ce système isostatique :

Créez 2 autres cas de chargement : **X_1 et 1** en conservant la même unité, le KNewton.

Montrez que : $\Delta_{10} + \Delta_{11} = 0$, ce qui correspond au problème initial : *pas de translation verticale possible sur l'appui simple en B.*

Choisissez le **mètre (m)** comme **unité de déplacement**

Δ_{10} = **m**

Δ_{11} = **m**

Ecart entre les deux valeurs :

$$\frac{|\Delta_{10}| - |\Delta_{11}|}{|\Delta_{10}|} \times 100 = \quad \%$$

Nous avons constaté que : $\Delta_{10} + \Delta_{11} = 0$ (*pas de déplacement en B dans le système initial*)

Nous pouvons alors exprimer que : $\frac{1}{2}.1.\,\Delta_{10} + \frac{1}{2}.1.\,\Delta_{11} = 0$ *déduit de* $\frac{1}{2}.1.(\Delta_{10} + \Delta_{11}) = 0$

Dans cette expression, **1** est la charge unitaire de **1KN**

Nous allons maintenant utiliser une relation combinée des deux principes de la mécanique présentés en introduction.

Détermination de $\frac{1}{2}.1.\,\Delta_{10}$

Remarque : il n'y a pas de charge concentrée dans le système 0. Pour calculer ce travail nous allons utiliser l'équivalent en énergie de déformation élastique.

Le principe d'équivalence nous dit :

« L'énergie de déformation élastique est égale au travail des actions extérieures »

Combinons ce principe avec le **principe des travaux virtuels** entre les systèmes 0 et 1.

½ .1. $\boldsymbol{\Delta_{10}}$: le travail de **l'action extérieure unitaire 1** dans le **déplacement compatible** $\boldsymbol{\Delta_{10}}$ **du système 0.**

est égale à

l'**énergie de déformation élastique du système unitaire 1 combinée aux efforts intérieurs du système 0**

Remarque 1 : les déformations élastiques de ces systèmes sont principalement dues au Moment fléchissant.

Remarque 2 : le long de chaque barre AB et BC, le module d'Young et l'inertie I_y sont constantes.

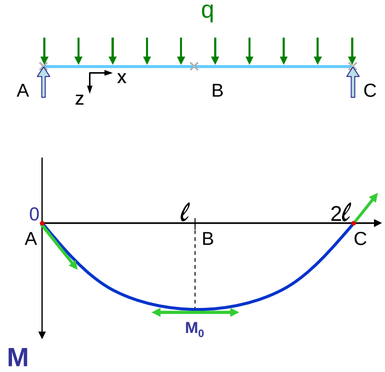
Remarque 3 : on décompose l'expression pour chaque barre AB et BC

$$\frac{1}{2}\underset{\text{KN}}{.1}\;\underset{\text{m}}{\Delta_{10}} = \frac{1}{2}\left(\frac{L_{AB}}{EI_y}\underbrace{\int_{\text{Barre AB}} M_0.\,m_1}_{\text{KNm}} + \frac{L_{BC}}{EI_y}\underbrace{\int_{\text{Barre BC}} M_0.\,m_1}_{\text{KNm}}\right)$$

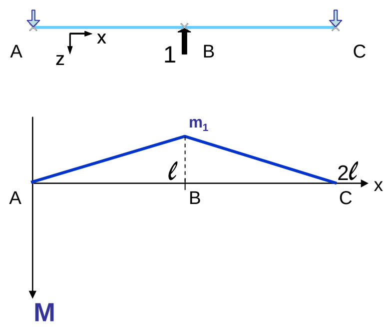
Pour calculer les valeurs de $\int_{\text{Barre}} M_0.\,m_1$ nous allons utiliser le tableau des intégrales de Mohr

Première étape : contrôlez les allures et valeurs maximum des diagrammes de M dans les deux systèmes

Système 0



Système 1



Extraire les valeurs de M_0 et m_1 des résultats de l'étude numérique.

ATTENTION : notre système de représentation est inversé par rapport à celui du logiciel, mais les signes restent les mêmes.

M_0 = ________________ KNm ; **m_1** = ________________ KNm

Discussion préalable sur les unités.

Pourquoi travaillons-nous en KiloNewton (KN) et en mètres (m) ?

Exemple: $L_{Barre} = 2m$ $E = 210\,000$ MPa $I_{Fort} = 456\ cm^4$

$210\,000 = 2{,}1 \cdot 10^{5}$

$1\ \text{MPa} = 10^6\ \text{Pa} = 10^6\ \text{N/m}^2 = 10^{3}\ \text{KN/m}^2$

5+3

$210\,000\ \text{MPa} = 2{,}1 \cdot 10^{8}\ \text{KN/m}^2$

$1\ cm^4 = (10^{-2}\ m)^4 = 10^{(-2 \times 4)}\ m^4 = 10^{(-8)}\ m^4$

-8 + 8

Conclusion : $210\,000\ \text{MPa} \cdot cm^4 = 2{,}1 \cdot 10^{0}\ \text{KN m}^2 = 2{,}1\ \text{KN m}^2$

Alors : $\dfrac{L_{Barre}}{EI_{Fort}} = \dfrac{2}{2{,}1 \quad 456}$ en $\dfrac{m}{KN\ m^2}$ soient $\dfrac{1}{KN\ m}$

Si M_0 et m_1 sont en KNm alors $M_0 \cdot m_1$ sera en KNm x KNm

Conclusion : $\dfrac{L}{EI_y} \displaystyle\int_{Barre} M_0 \cdot m_1$ a pour unités $\dfrac{KNm \times KNm}{KN\ m^2}$

Ainsi : $\dfrac{L}{EI_y} \displaystyle\int_{Barre} M_0 \cdot m_1$ a pour unités $\dfrac{KNm \times KNm}{KN\ m}$ Soient des KNm (KJoules)

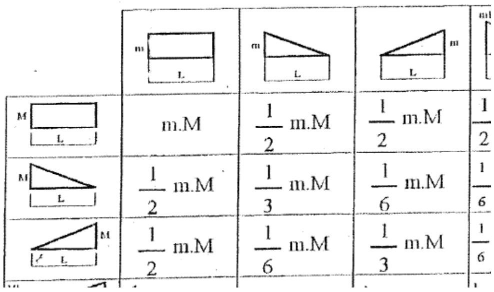
Nous cherchons la valeur de Δ_{10} par le calcul :

$$\frac{1}{2} \cdot \underset{KN}{1} \cdot \underset{m}{\Delta_{10}} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{L_{AB}}{EI_y} \int_{Barre\ AB} M_0 \cdot m_1}_{KNm} + \underbrace{\frac{L_{BC}}{EI_y} \int_{Barre\ BC} M_0 \cdot m_1}_{KNm} \right)$$

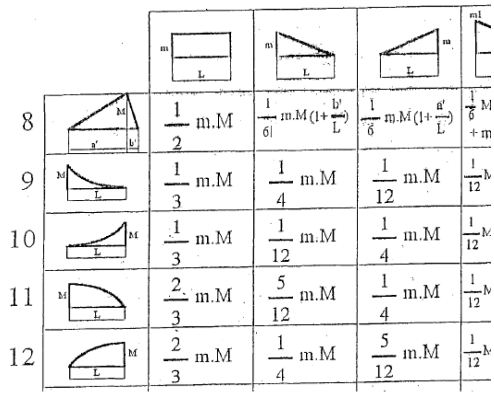
En choisissant comme unités générales le KiloNewton (KN) et le mètre (m)
En prenant dans l'expression $\dfrac{L}{EI_y}$ — des mètres pour L ; 2,1 pour E ; La valeur en cm^4 pour I_y
En prenant la charge unité égale à 1 KN
L'unité du déplacement Δ cherché est le mètre (m)

Complétez le tableau A en utilisant l'extrait du tableau des intégrales de Mohr ci-dessous.

Extrait du tableau de l'épreuve U41 – mécanique

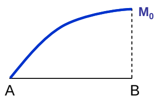
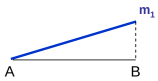
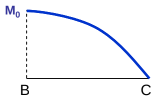
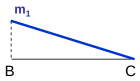


	m (L)	m (L)	m (L)	ml
1	$m.M$	$\frac{1}{2}m.M$	$\frac{1}{2}m.M$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}m.M$	$\frac{1}{3}m.M$	$\frac{1}{6}m.M$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{2}m.M$	$\frac{1}{6}m.M$	$\frac{1}{3}m.M$	$\frac{1}{6}$



	m (L)	m (L)	m (L)	ml
8	$\frac{1}{2}m.M$	$\frac{1}{6}m.M(1+\frac{b'}{L})$	$\frac{1}{6}m.M(1+\frac{a'}{L})$	$\frac{1}{6}M$ … $+m$
9	$\frac{1}{3}m.M$	$\frac{1}{4}m.M$	$\frac{1}{12}m.M$	$\frac{1}{12}M$
10	$\frac{1}{3}m.M$	$\frac{1}{12}m.M$	$\frac{1}{4}m.M$	$\frac{1}{12}M$
11	$\frac{2}{3}m.M$	$\frac{5}{12}m.M$	$\frac{1}{4}m.M$	$\frac{1}{12}M$
12	$\frac{2}{3}m.M$	$\frac{1}{4}m.M$	$\frac{5}{12}m.M$	$\frac{1}{12}M$

Tableau A

	Allure et valeurs de **M** $_0$ (chargement 0)	Allure et valeurs de **m** $_1$ (chargement 1)	Résultat tableau de Mohr	L / (EI)	Résultat en KJoules (KNm)
Barre A-B L= 2m IPE 100					
Barre B-C L= 2m IPE 100					
				Somme	

En prenant la valeur de Δ_{10} dans les résultats du logiciel vérifiez :

$$\underset{KN}{\frac{1}{2}}.1\,\underset{m}{\Delta_{10}} = \frac{1}{2}\overbrace{\left(\frac{L_{AB}}{EI_y}\underset{\text{Barre AB}}{\int M_0.\,m_1} + \frac{L_{BC}}{EI_y}\underset{\text{Barre BC}}{\int M_0.\,m_1}\right)}^{\text{Somme du tableau A}}$$

KN m KNm KNm

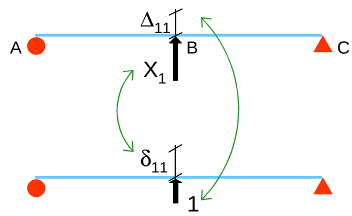
Calcul

Expression de ½ .1. Δ_{11}

Travaux virtuels

Le **travail** de l'action unitaire **1** dans le déplacement compatible Δ_{11} sous le chargement $X_{\mathbf{1}}$ est égal au :

travail de l'action unitaire $\mathbf{X_1}$ dans le déplacement compatible δ_{11} sous le chargement unitaire **1**



Situation particulière dans laquelle les deux chargements sont appliqués au même endroit.

Alors : ½ .**1**. Δ_{11} = ½ . $\mathbf{X_1}$. δ_{11} (unité KJoules ou KN.m)

Détermination de δ_{11}

Le principe est d'appliquer le même type de résolution que précédemment en combinant le système 1 avec lui-même pour calculer au final : ½ . **1**. δ_{11} et donc obtenir δ_{11}

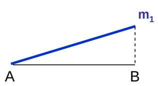
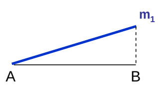
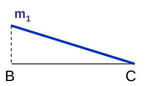
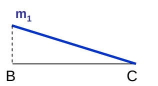
½ .1. δ_{11} : le travail de **l'action extérieure unitaire 1** dans le **déplacement compatible δ_{11} du système 1.**

est égale à

l'**énergie de déformation élastique du système unitaire 1 combinée aux efforts intérieurs du système 1**

De façon directe, cela revient à établir le tableau suivant :

Tableau B

	Allure et valeurs de **m ₁** (chargement 1)	Allure et valeurs de **m ₁** (chargement 1)	Résultat tableau de Mohr	L / (EI)	Résultat en KJoules (KNm)
Barre A-B L= 2m IPE 100					
Barre B-C L= 2m IPE 100					
				Somme	

En prenant la valeur de δ_{11} dans les résultats du logiciel vérifiez :

$$\frac{1}{2}.1\,\delta_{11} = \frac{1}{2}\overbrace{\left(\frac{L_{AB}}{EI_y}\underbrace{\int m_1.\,m_1}_{\text{Barre AB}} + \frac{L_{BC}}{EI_y}\underbrace{\int m_1.\,m_1}_{\text{Barre BC}}\right)}^{\text{Somme du tableau B}}$$

δ_{11} RdmLeMans = ______________________

δ_{11} calculé = __________________________

Ecart % = ___________ %

Nous pouvons maintenant retrouver la valeur X_1

Expression de départ : ½ .1. Δ_{10} + ½ .1. Δ_{11} = 0

On a montré ½ .**1**. Δ_{11} = ½ . $\mathbf{X_1}$. δ_{11}

Alors : ½ .1. Δ_{10} + ½ . $\mathbf{X_1}$. δ_{11}= 0

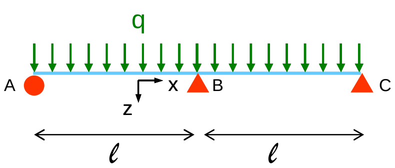
Bilan

$$\overset{KN}{X_1} = \frac{-\,1.\overset{KN\ m}{\Delta_{10}}}{\underset{m}{\delta_{11}}}$$

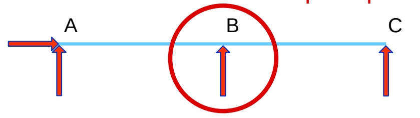
Application numérique :

$\mathbf{X_1}$ = _________________ KN

RESUMÉ : Etude d'un système hyperstatique extérieurement de degré 1



Choix de l'inconnue principale



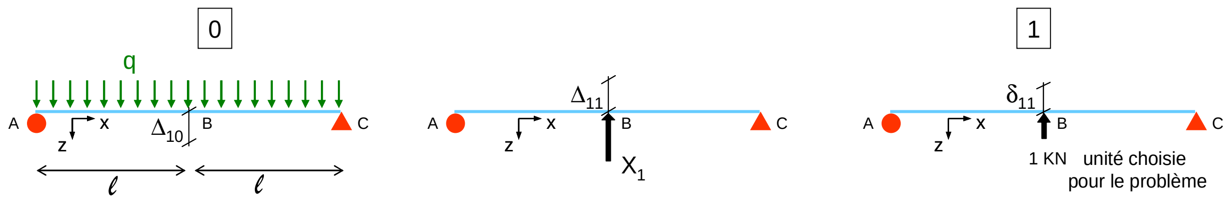
En choisissant comme unités générales
le KiloNewton (KN) et le mètre (m)

En prenant dans l'expression $\frac{L}{EI_y}$ | des mètres pour L
2,1 pour E
La valeur en cm^4 pour I_y

En prenant la charge unité égale à 1 KN

L'unité du déplacement Δ cherché est le mètre (m)

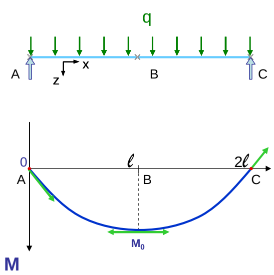
Décomposition



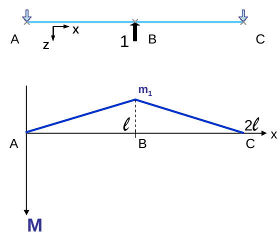
Relation : *Déplacement nul en B dans le système initial* ½ .**1**. Δ_{10} + ½ .**1**. Δ_{11} = 0 et ½ .**1**. Δ_{11} = ½ . $\mathbf{X_1}$. δ_{11}

Diagrammes de moments dans les systèmes isostatiques 0 et 1

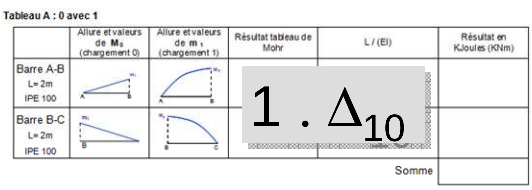
Système 0

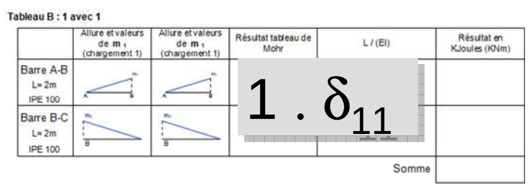


Système 1



Calcul des énergies de déformations combinées entre les systèmes 0 et 1 puis 1 et 1





Calcul de la valeur de l'inconnue hyperstatique :

$$\overset{\text{KN}}{X_1} = \frac{-\,\overset{\text{KN}}{1}.\overset{\text{m}}{\Delta_{10}}}{\underset{\text{m}}{\delta_{11}}}$$