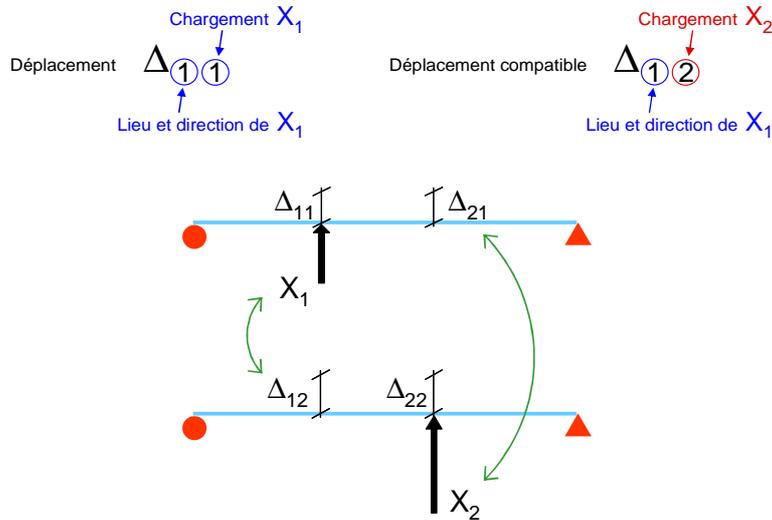


TP d'énergétique N°2

Nous allons valider l'utilisation combinée de deux principes de la mécanique pour la détermination d'une inconnue hyperstatique.

Le principe des travaux virtuels (forme appliquée).



Le **travail** de X_1 dans le déplacement compatible Δ_{12} sous le chargement X_2 $\frac{1}{2} X_1 \cdot \Delta_{12}$
est égal au

travail de X_2 dans le déplacement compatible Δ_{21} sous le chargement X_1 $\frac{1}{2} X_2 \cdot \Delta_{21}$

Le principe d'équivalence

« L'énergie de déformation élastique est égale au travail des actions extérieures »

$$\frac{1}{2} \int_{\text{Barre}} \text{Effort intérieur} \cdot \text{Déformation élastique} = \frac{1}{2} \text{Action extérieure} \cdot \text{Déplacement}$$

Traction

$$\frac{1}{2} \int_{\text{Barre}} N \cdot \varepsilon = \frac{1}{2} \int_{\text{Barre}} N \cdot \frac{N}{EA} = \frac{1}{2} X_1 \Delta_{11}$$

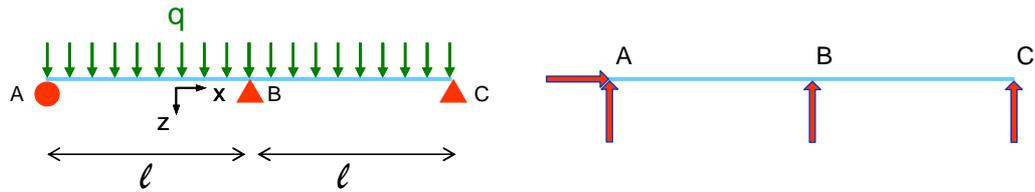
Flexion

$$\frac{1}{2} \int_{\text{Barre}} M \cdot \omega = \frac{1}{2} \int_{\text{Barre}} M \cdot \frac{M}{EI_y} = \frac{1}{2} X_1 \Delta_{11}$$

Lorsque E , A et I_y sont constants le long d'une barre on calculera

$$\frac{L_{\text{Barre}}}{EA} \int_{\text{Barre}} N \cdot N \quad \text{ou} \quad \frac{L_{\text{Barre}}}{EI_y} \int_{\text{Barre}} M \cdot M \quad \text{à l'aide du tableau des intégrales de Mohr}$$

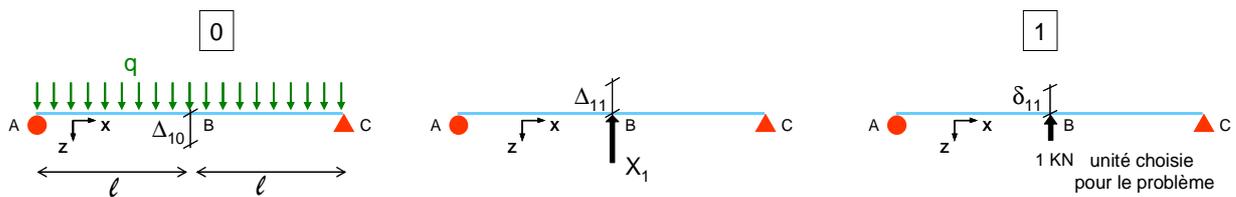
Etude d'un système initial hyperstatique extérieurement de degré 1



1 / Nous allons définir un **système isostatique associé** $\boxed{0}$ dans lequel nous **ajoutons un degré de liberté**.

2/ Dans un système identique mais **sans le chargement initial**, nous définissons une **inconnue principale de liaison** que nous noterons X_1 compatible avec ce nouveau degré de liberté.

3/ Nous définissons ensuite un **système à chargement unitaire** $\boxed{1}$ correspondant à cette inconnue principale. Nous choisissons de traiter ce problème en KN, donc cette action vaut 1 KN

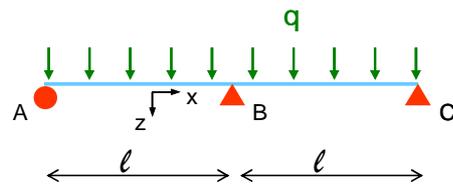


Etude des réactions d'appui sur le système initial

$L = 2m$

Profil IPE 100

Chargement : $q = 40 \text{ KN/m}$



Extraire des résultats du logiciel la valeur de la réaction en B

Donnez cette valeur à X_1 : $X_1 = 100 \text{ KN}$

Trouvez les coefficients α et β :

$$R_{Ay} = R_{Cy} = \alpha q \ell \quad \alpha = \mathbf{0,375} \text{ en A et C}$$

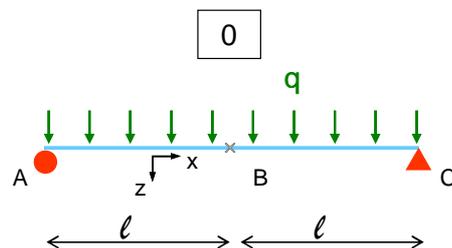
$$R_{By} = \beta q \ell \quad \beta = \mathbf{1,25} \text{ en B}$$

Etude des chargements sur le système isostatique associé

$L = 2m$

Profil IPE 100

Chargement : $q = 40 \text{ KN/m}$



Dans ce système isostatique :

Créez 2 autres cas de chargement : X_1 et 1 en conservant la même unité, le KNewton.

Montrez que : $\Delta_{10} + \Delta_{11} = 0$, ce qui correspond au problème initial : *pas de translation verticale possible sur l'appui simple en B.*

Choisissez le **mètre (m)** comme **unité de déplacement**

$$\Delta_{10} = -0,3712723 \text{ m}$$

$$\Delta_{11} = -0,3712723 \text{ m}$$

Ecart entre les deux valeurs :

$$\frac{|\Delta_{10}| - |\Delta_{11}|}{|\Delta_{10}|} \times 100 = 0 \%$$

Nous avons constaté que : $\Delta_{10} + \Delta_{11} = 0$ (pas de déplacement en B dans le système initial)

Nous pouvons alors exprimer que : $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Delta_{10} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Delta_{11} = 0$ déduit de $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (\Delta_{10} + \Delta_{11}) = 0$

Dans cette expression, **1** est la charge unitaire de **1KN**

Nous allons maintenant utiliser une relation combinée des deux principes de la mécanique présentés en introduction.

Détermination de $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Delta_{10}$

Remarque : il n'y a pas de charge concentrée dans le système 0. Pour calculer ce travail nous allons utiliser l'équivalent en énergie de déformation élastique.

Le principe d'équivalence nous dit :

« L'énergie de déformation élastique est égale au travail des actions extérieures »

Combinons ce principe avec le **principe des travaux virtuels** entre les systèmes 0 et 1.

$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Delta_{10}$: le travail de l'action extérieure unitaire **1** dans le déplacement compatible Δ_{10} du système 0. est égale à

l'énergie de déformation élastique du système unitaire **1** combinée aux efforts intérieurs du système 0

Remarque 1 : les déformations élastiques de ces systèmes sont principalement dues au Moment fléchissant.

Remarque 2 : le long de chaque barre AB et BC, le module d'Young et l'inertie I_y sont constantes.

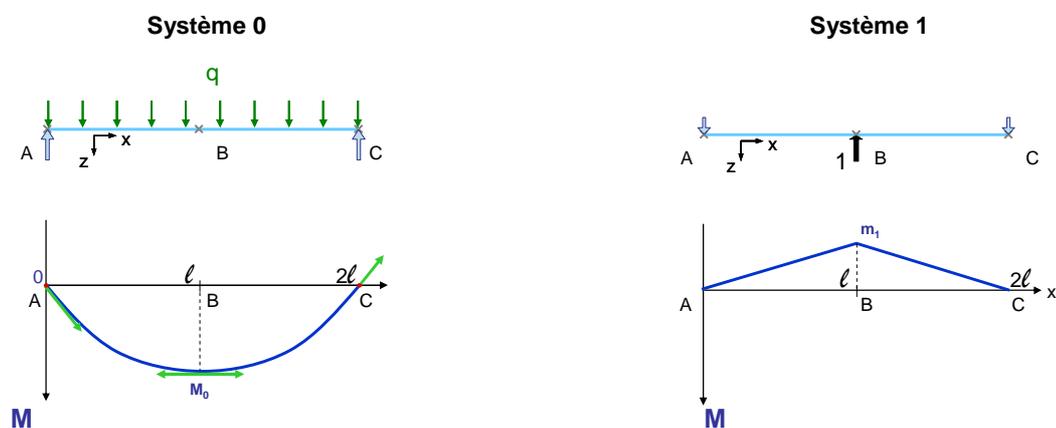
Remarque 3 : on décompose l'expression pour chaque barre AB et BC

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{KN}} \cdot \underbrace{1}_{\text{m}} \cdot \Delta_{10} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{L_{AB}}{EI_y}}_{\text{Barre AB}} \int M_0 \cdot m_1 + \underbrace{\frac{L_{BC}}{EI_y}}_{\text{Barre BC}} \int M_0 \cdot m_1 \right)$$

KNm KNm

Pour calculer les valeurs de $\int_{\text{Barre}} M_0 \cdot m_1$ nous allons utiliser le tableau des intégrales de Mohr

Première étape : contrôlez les allures et valeurs maximum des diagrammes de M dans les deux systèmes



Extraire les valeurs de M_0 et m_1 des résultats de l'étude numérique.

ATTENTION : notre système de représentation est inversé par rapport à celui du logiciel, mais les signes restent les mêmes.

$$M_0 = 80 \text{ KNm} \quad ; \quad m_1 = -1 \text{ KNm}$$

Discussion préalable sur les unités.

Pourquoi travaillons-nous en KiloNewton (KN) et en mètres (m) ?

Exemple: $L_{\text{Barre}} = 2\text{m}$ $E = 210\,000 \text{ MPa}$ $I_{\text{Fort}} = 456 \text{ cm}^4$

$$210\,000 = 2,1 \cdot 10^5$$

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2 = 10^3 \text{ KN/m}^2$$

$$210\,000 \text{ MPa} = 2,1 \cdot 10^8 \text{ KN/m}^2$$

$$1 \text{ cm}^4 = (10^{-2} \text{ m})^4 = 10^{(-2 \times 4)} \text{ m}^4 = 10^{(-8)} \text{ m}^4$$

Conclusion : $210\,000 \text{ MPa} \cdot \text{cm}^4 = 2,1 \cdot 10^0 \text{ KN m}^2 = 2,1 \text{ KN m}^2$

$$\text{Alors : } \frac{L_{\text{Barre}}}{EI_{\text{Fort}}} = \frac{2}{2,1 \cdot 456} \text{ en } \frac{\text{m}}{\text{KN m}^2} \text{ soient } \frac{1}{\text{KN m}}$$

Si M_0 et m_1 sont en KNm alors $M_0 \cdot m_1$ sera en $\text{KNm} \times \text{KNm}$

$$\text{Conclusion : } \frac{L}{EI_y} \int_{\text{Barre}} M_0 \cdot m_1 \text{ a pour unités } \frac{\text{KNm} \times \text{KNm}}{\text{KN m}^2}$$

$$\text{Ainsi : } \frac{L}{EI_y} \int_{\text{Barre}} M_0 \cdot m_1 \text{ a pour unités } \frac{\text{KNm} \times \text{KNm}}{\text{KN m}} \text{ Soient des KNm (KJoules)}$$

Nous cherchons la valeur de Δ_{10} par le calcul :

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Delta_{10} = \frac{1}{2} \left(\frac{L_{\text{AB}}}{EI_y} \int_{\text{Barre AB}} M_0 \cdot m_1 + \frac{L_{\text{BC}}}{EI_y} \int_{\text{Barre BC}} M_0 \cdot m_1 \right)$$

$\frac{1}{2}$
KN
 $\cdot 1$
m
 $=$
 $\frac{1}{2}$
 $\left(\frac{L_{\text{AB}}}{EI_y} \int_{\text{Barre AB}} M_0 \cdot m_1 + \frac{L_{\text{BC}}}{EI_y} \int_{\text{Barre BC}} M_0 \cdot m_1 \right)$

En choisissant comme unités générales
le KiloNewton (KN) et le mètre (m)

En prenant dans l'expression $\frac{L}{EI_y}$ | des mètres pour L
2,1 pour E
La valeur en cm^4 pour I_y

En prenant la charge unité égale à 1 KN

L'unité du déplacement Δ cherché est le mètre (m)

Complétez le tableau A en utilisant l'extrait du tableau des intégrales de Mohr ci-dessous.

Extrait du tableau de l'épreuve U41 – mécanique

1		$m \cdot M$	$\frac{1}{2} m \cdot M$	$\frac{1}{2} m \cdot M$
2		$\frac{1}{2} m \cdot M$	$\frac{1}{3} m \cdot M$	$\frac{1}{6} m \cdot M$
3		$\frac{1}{2} m \cdot M$	$\frac{1}{6} m \cdot M$	$\frac{1}{3} m \cdot M$

8		$\frac{1}{2} m \cdot M$	$\frac{1}{6} m \cdot M (1 + \frac{b'}{L})$	$\frac{1}{6} m \cdot M (1 + \frac{a'}{L})$
9		$\frac{1}{3} m \cdot M$	$\frac{1}{4} m \cdot M$	$\frac{1}{12} m \cdot M$
10		$\frac{1}{3} m \cdot M$	$\frac{1}{12} m \cdot M$	$\frac{1}{4} m \cdot M$
11		$\frac{2}{3} m \cdot M$	$\frac{5}{12} m \cdot M$	$\frac{1}{4} m \cdot M$
12		$\frac{2}{3} m \cdot M$	$\frac{1}{4} m \cdot M$	$\frac{5}{12} m \cdot M$

Tableau A

	Allure et valeurs de M_0 (chargement 0)	Allure et valeurs de m_1 (chargement 1)	Résultat tableau de Mohr	$L / (EI)$	Résultat en KJoules (KNm)
Barre A-B $L = 2m$ IPE 100			$\frac{5}{12} m_1 \cdot M_0$ $= - 33,33$	$\frac{2}{(2,1 \cdot 171,012)} = 0,0055690$ $= 5,569 \cdot 10^{-3}$	- 0,18563
Barre B-C $L = 2m$ IPE 100			$\frac{5}{12} m_1 \cdot M_0$ $= - 33,33$	$\frac{2}{(2,1 \cdot 171,012)} = 0,0055690$ $= 5,569 \cdot 10^{-3}$	- 0,18563
				Somme	- 0,37126

En prenant la valeur de Δ_{10} dans les résultats du logiciel vérifiez :

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Delta_{10} = \frac{1}{2} \left[\frac{L_{AB}}{EI_y} \int_{\text{Barre AB}} M_0 \cdot m_1 + \frac{L_{BC}}{EI_y} \int_{\text{Barre BC}} M_0 \cdot m_1 \right]$$

KN
m
KNm
KNm

Calcul :

$$\frac{1}{2} \cdot (- 0,3712723) = - 0,18563615$$

$$\frac{1}{2} \cdot (- 0,37126) = - 0,18563$$

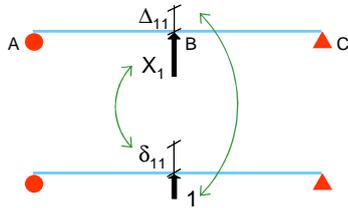
$$\text{Ecat \%} = (0,18563615 - 0,18563) / 0,18563615 \times 100 = 0,0033 \%$$

Expression de $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Delta_{11}$

Travaux virtuels

Le **travail** de l'action unitaire **1** dans le déplacement compatible Δ_{11} sous le chargement X_1 est égal au :

travail de l'action unitaire X_1 dans le déplacement compatible δ_{11} sous le chargement unitaire **1**



$$\text{Alors : } \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot X_1 \cdot \delta_{11} \text{ (unité KJoules ou KN.m)}$$

Situation particulière dans laquelle les deux chargements sont appliqués au même endroit.

Détermination de δ_{11}

Le principe est d'appliquer le même type de résolution que précédemment en combinant le système 1 avec lui-même pour calculer au final : $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \delta_{11}$ et donc obtenir δ_{11}

$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \delta_{11}$: le travail de l'action extérieure unitaire **1** dans le déplacement compatible δ_{11} du système **1** est égale à

l'énergie de déformation élastique du système unitaire **1** combinée aux efforts intérieurs du système **1**

De façon directe, cela revient à établir le tableau suivant :

Tableau B

	Allure et valeurs de m_1 (chargement 1)	Allure et valeurs de m_1 (chargement 1)	Résultat tableau de Mohr	$L / (EI)$	Résultat en KJoules (KNm)
Barre A-B $L=2m$ IPE 100			$\frac{1}{3} m_1 \cdot m_1$ $= + 0,33$	$\frac{2}{(2,1 \cdot 171,012)} = 0,0055690$ $= 5,569 \cdot 10^{-3}$	0,00185614
Barre B-C $L=2m$ IPE 100			$\frac{1}{3} m_1 \cdot m_1$ $= + 0,33$	$\frac{2}{(2,1 \cdot 171,012)} = 0,0055690$ $= 5,569 \cdot 10^{-3}$	0,00185614
Somme					0,00371229

En prenant la valeur de δ_{11} dans les résultats du logiciel vérifiez :

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \delta_{11} = \frac{1}{2} \left[\overbrace{\left(\frac{L_{AB}}{EI_y} \int_{\text{Barre AB}} m_1 \cdot m_1 + \frac{L_{BC}}{EI_y} \int_{\text{Barre BC}} m_1 \cdot m_1 \right)}^{\text{Somme du tableau B}} \right]$$

$\delta_{11}^{\text{RdmLeMans}} = 0,00371272$

$\delta_{11}^{\text{calculé}} = 0,00371229$

Ecart % = - 0,01158 %

Nous pouvons maintenant retrouver la valeur X_1

Expression de départ : $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Delta_{10} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Delta_{11} = 0$

On a montré $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot X_1 \cdot \delta_{11}$

Alors : $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Delta_{10} + \frac{1}{2} \cdot X_1 \cdot \delta_{11} = 0$

$$X_1 = \frac{\text{KN} \quad \text{KN} \cdot \text{m}}{\text{m}} = \frac{-1 \cdot \Delta_{10}}{\delta_{11}}$$

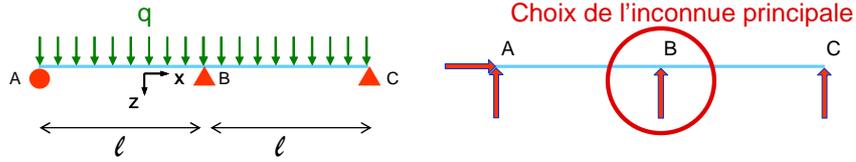
Application numérique :

$$X_1 = -1 \cdot (-0,37126) / 0,00371229$$

$$X_1 = 100,008 \text{ KN}$$

Ecart % = 0,008 %

RESUMÉ : Etude d'un système hyperstatique extérieurement de degré 1



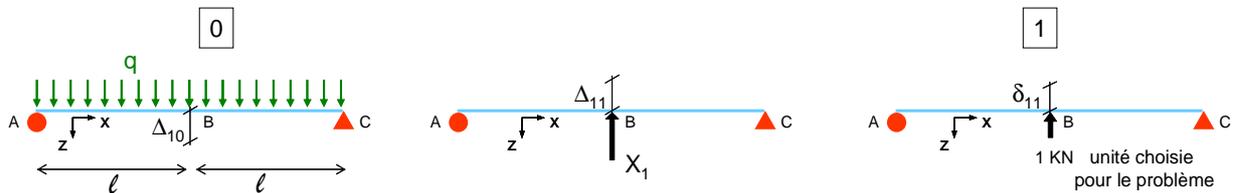
En choisissant comme unités générales le KiloNewton (KN) et le mètre (m)

En prenant dans l'expression $\frac{L}{EI_y}$ | des mètres pour L
| 2,1 pour E
| La valeur en cm⁴ pour I_y

En prenant la charge unité égale à 1 KN

L'unité du déplacement Δ cherché est le mètre (m)

Décomposition



Relation : Déplacement nul en B dans le système initial $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Delta_{10} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Delta_{11} = 0$ et $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot X_1 \cdot \delta_{11}$

Diagrammes de moments dans les systèmes isostatiques 0 et 1



Calcul des énergies de déformations combinées entre les systèmes 0 et 1 puis 1 et 1

Tableau A : 0 avec 1

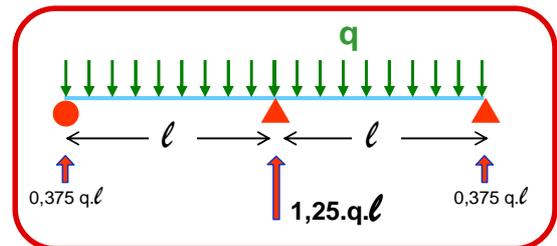
	Allure et valeurs de M ₀ (chargement q)	Allure et valeurs de m ₁ (chargement 1)	Résultat tableau de Mohr	L / (EI)	Résultat en KiloJoules (KJm)
Barre A-B L=2m IPE 100			1 · Δ₁₀		
Barre B-C L=2m IPE 100					
Somme					

Tableau B : 1 avec 1

	Allure et valeurs de m ₀ (chargement 1)	Allure et valeurs de m ₁ (chargement 1)	Résultat tableau de Mohr	L / (EI)	Résultat en KiloJoules (KJm)
Barre A-B L=2m IPE 100			1 · δ₁₁		
Barre B-C L=2m IPE 100					
Somme					

Calcul de la valeur de l'inconnue hyperstatique :

$$X_1 = \frac{\text{KN} \cdot \text{m}}{\frac{\text{m}}{\text{m}}} = \frac{\text{KN} \cdot \text{m}}{\delta_{11}}$$



Résultat à retenir