TP d'énergétique N°3

Application de la méthodologie du TP N°2 pour la détermination de 2 inconnues hyperstatiques.

Généralisation du principe des travaux virtuels à 2 inconnues (forme appliquée).

Rappel du TP N°2 : Le principe des travaux virtuels (forme appliquée).

Chargement X_1

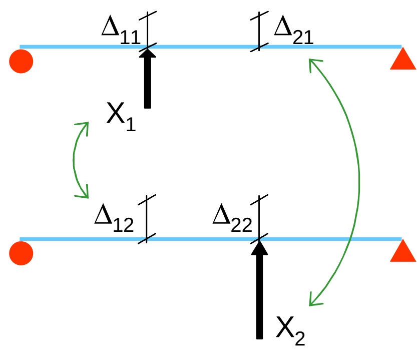
Déplacement $\Delta_{①①}$

Lieu et direction de X_1

Chargement X_2

Déplacement compatible $\Delta_{①②}$

Lieu et direction de X_1

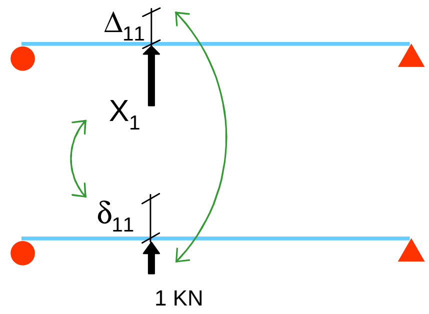


Le **travail** de X_1 dans le déplacement compatible Δ_{12} sous le chargement X_2 $\quad \frac{1}{2} X_1 . \Delta_{12}$

est égal au

travail de X_2 dans le déplacement compatible Δ_{21} sous le chargement X_1 $\quad \frac{1}{2} X_2 . \Delta_{21}$

De façon similaire on peut déduire :



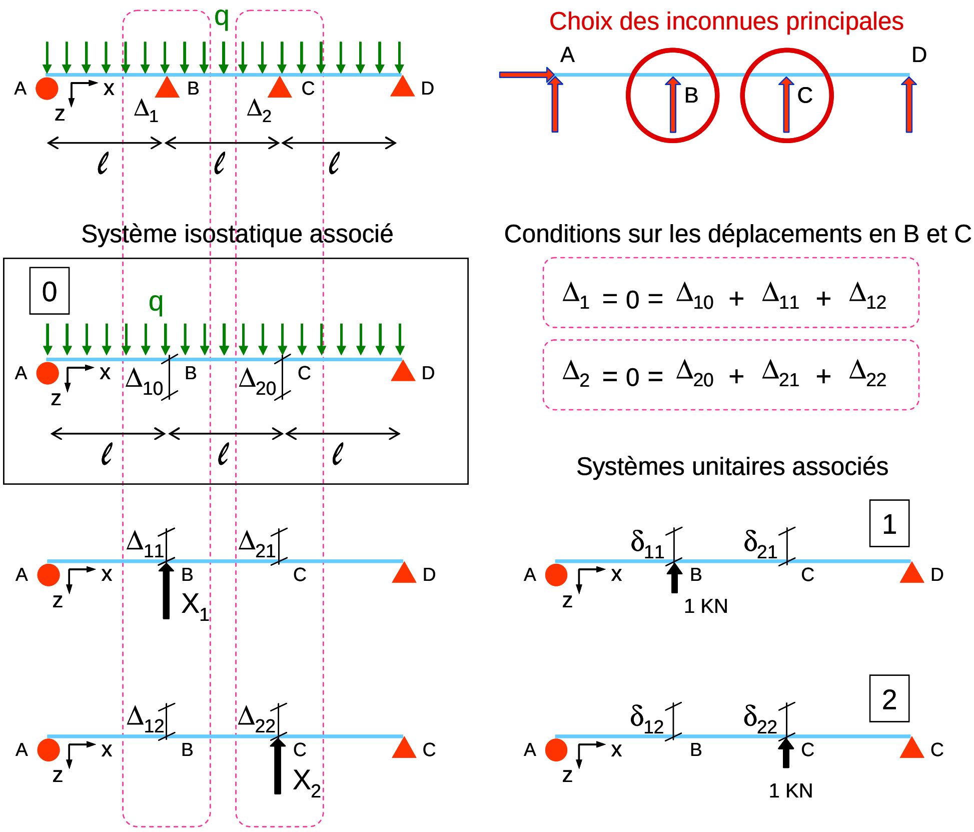
Le **travail** de X_1 dans le déplacement compatible δ_{11} sous chargement unitaire $\quad \frac{1}{2} X_1 . \delta_{11}$

Le **travail** de 1 dans le déplacement compatible Δ_{11} sous le chargement X_1 $\quad \frac{1}{2}\ 1\ . \Delta_{11}$

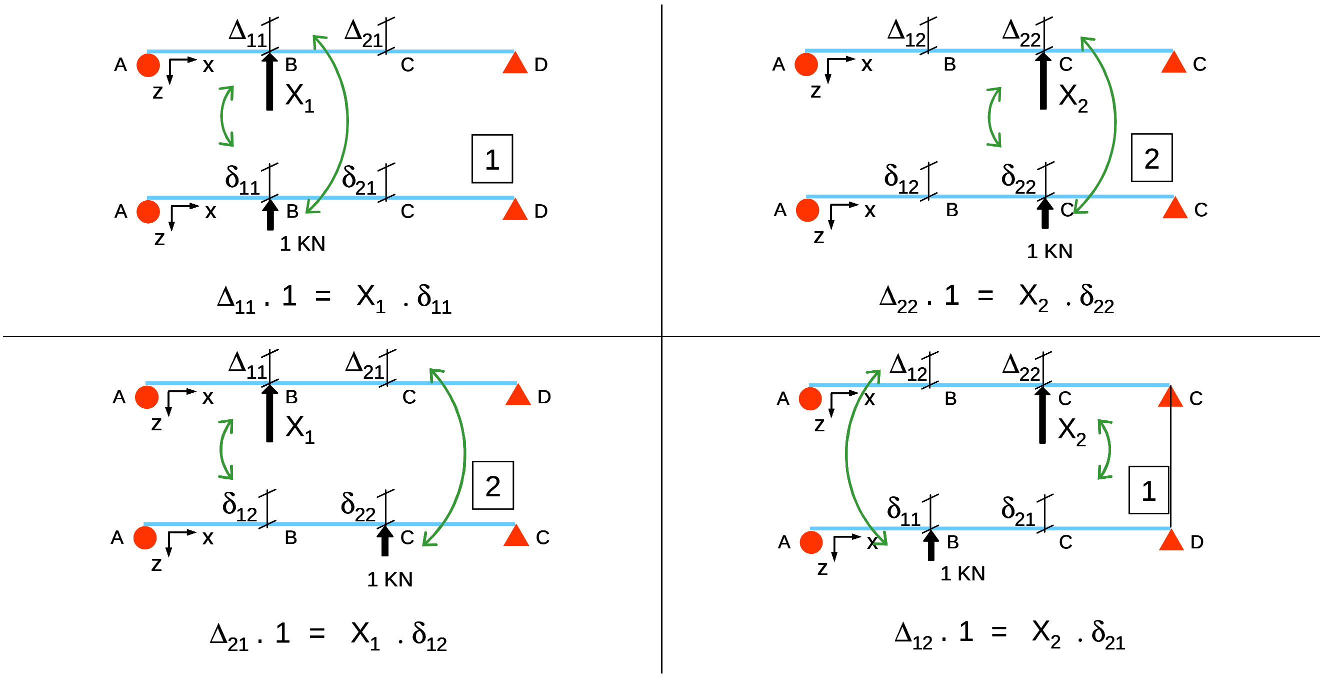
Remarque : la littérature fait souvent un raccourci en indiquant que Δ_{11} et δ_{11} sont proportionnels et en écrivant : $\Delta_{11} = X_1 \ . \ \delta_{11}$ ce qui est incorrect car non homogène. La formulation correcte est :

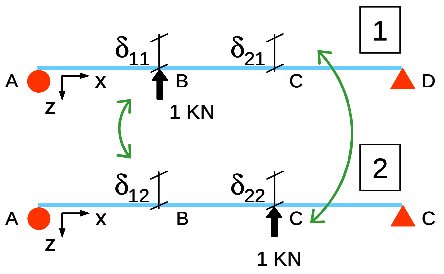
$$1 \ . \ \Delta_{11} = X_1 \ . \ \delta_{11} \quad \text{avec 1 charge unitaire}$$

Etude d'un système initial hyperstatique extérieurement de degré 2



Expressions des Δ_{ij} : les coefficients ½ ont été simplifiés dans toutes les relations





$$\delta_{12} \,.\, 1 \;=\; 1 \,.\, \delta_{21}$$

$\delta_{12} = \delta_{21}$ appliquons aux relations:

$$\Delta_{21} \,.\, 1 \;=\; X_1 \,.\, \delta_{12} \;=\; X_1 \,.\, \delta_{21}$$

$$\Delta_{12} \,.\, 1 \;=\; X_2 \,.\, \delta_{21} \;=\; X_2 \,.\, \delta_{12}$$

Les conditions sur les déplacements en B et C deviennent :

$$\boxed{\Delta_1 = 0 = \Delta_{10} + \Delta_{11} + \Delta_{12}} = \Delta_{10} + X_1 \,.\, \delta_{11} + X_2 \,.\, \delta_{12}$$

$$\boxed{\Delta_2 = 0 = \Delta_{20} + \Delta_{21} + \Delta_{22}} = \Delta_{20} + X_1 \,.\, \delta_{21} + X_2 \,.\, \delta_{22}$$

On en déduit la formulation générale:

Système isostatique associé

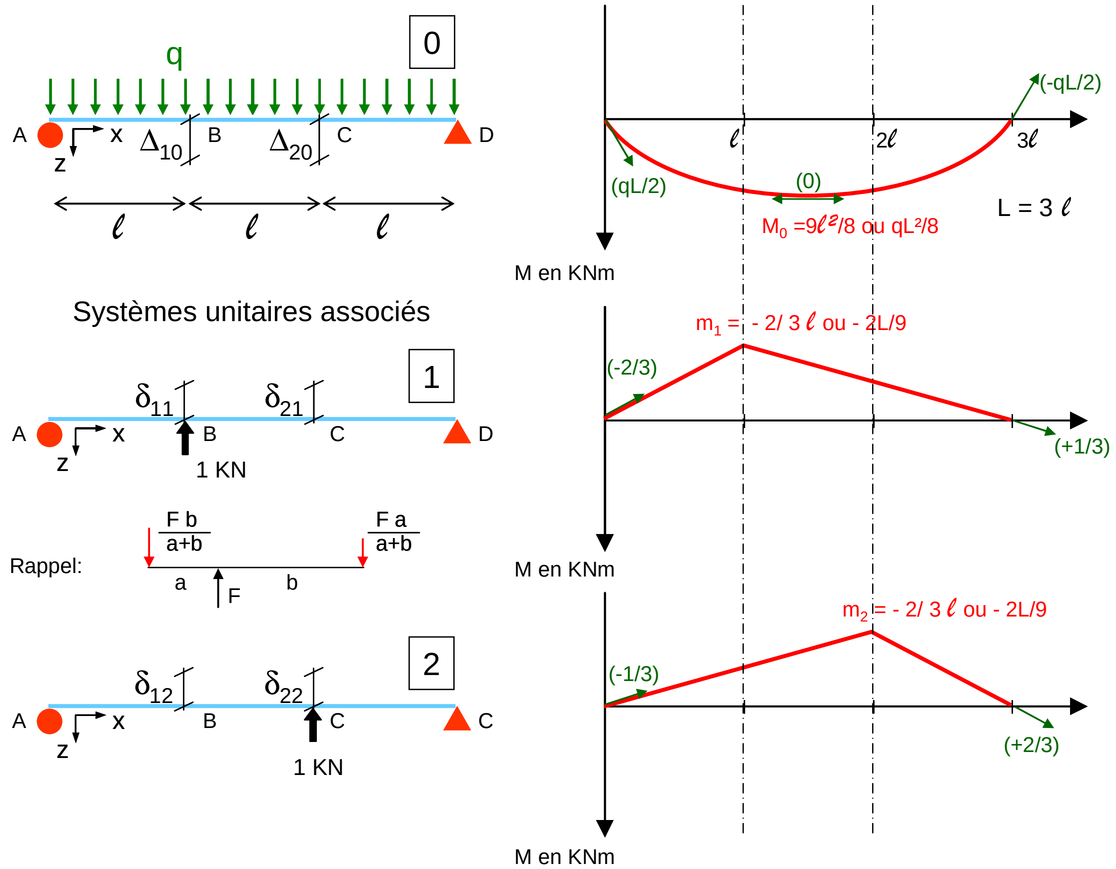
Combinaisons sur les Système unitaires

$$0 \;=\; \Delta_{i0} + \sum_j X_j \,.\, \delta_{ij}$$

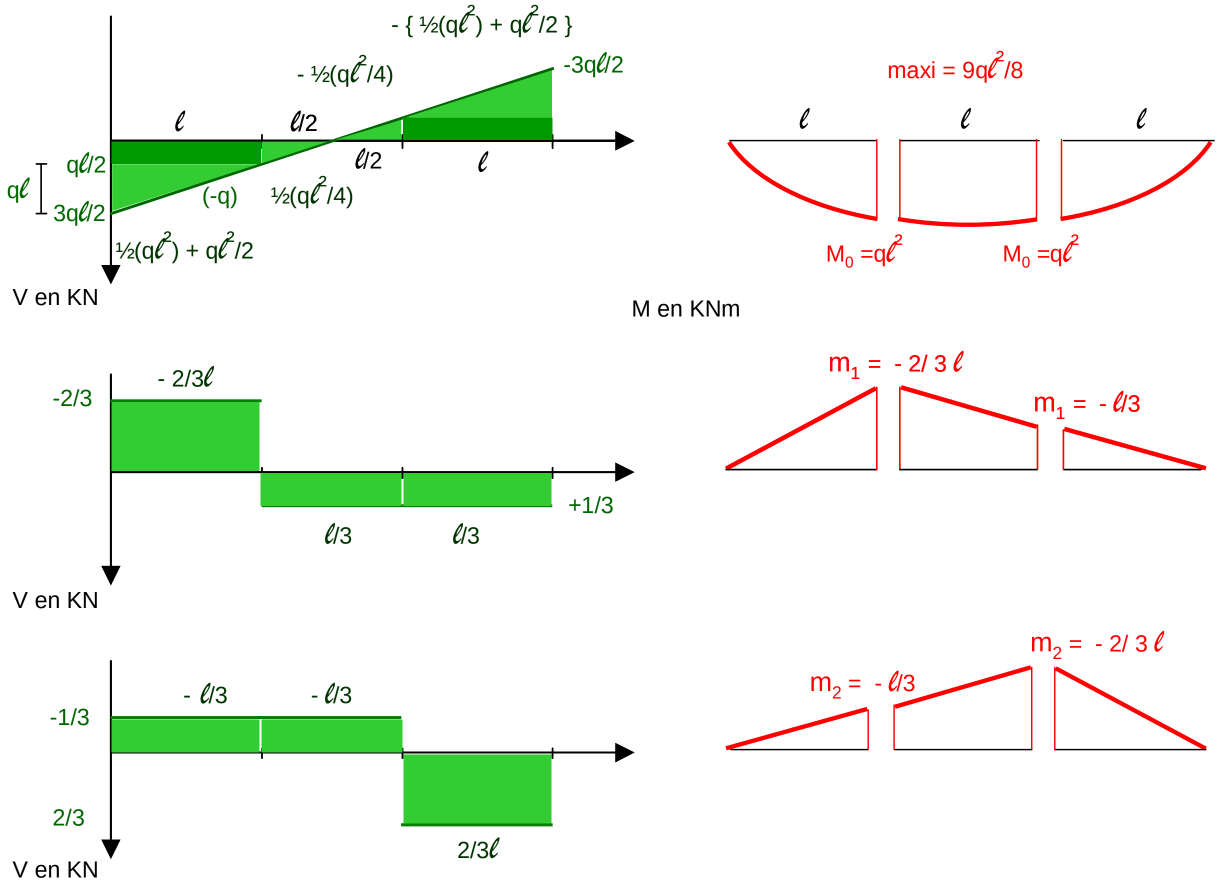
La résolution du problème revient alors à déterminer les Δij et les δij en utilisant le principe d'équivalence (travail extérieur/énergie de déformation) et donc à calculer ces déplacements à l'aide du tableau des intégrales de Mohr après avoir établi les diagrammes de moments de chaque système (isostatiques et unitaires)

Diagrammes de moments : nous formulons l'hypothèse que l'énergie de déformation dans les différents systèmes est principalement due au moment fléchissant.

Système isostatique associé



Remarque : les résultats connus pour ces diagrammes ne suffisent pas car il faut calculer les différentes valeurs de M_0, m_1 et m_2 aux extrémités de chaque tronçon étudié. Le calcul de ces valeurs peut se faire par la détermination des aires de la fonction d'effort tranchant (variation du moment). Nous proposons alors :



Calcul de l'expression L/EIy : sa valeur est constante parce que la poutre a une inertie constante et les tronçons ont la même longueur. Dans un calcul général il faudra penser à spécifier chaque valeur en fonction du tronçon ou de la barre étudiée.

Rappel

En choisissant comme unités générales
le KiloNewton (KN) et le mètre (m)

En prenant dans l'expression $\dfrac{L}{EI_y}$ | des mètres pour L
2,1 pour E
La valeur en cm⁴ pour I_y

En prenant la charge unité égale à 1 KN

L'unité du déplacement Δ cherché est le mètre (m)

Tableau de calculs et de résultats

Barre			Tableau de Mohr	ℓ / E I_y	
A-B	$M_0 = q\ell^2$	$m_1 = - 2/3\,\ell$			$\Delta_{10} =$
B-C	$M_0 = q\ell^2$ $M_0 = q\ell^2$	$m_1 = - 2/3\,\ell$ $m_1 = - \ell/3$			
C-D	$M_0 = q\ell^2$	$m_1 = - \ell/3$			

A-B	$M_0 = q\ell^2$	$m_2 = - \ell/3$			$\Delta_{20} =$
B-C	$M_0 = q\ell^2$ $M_0 = q\ell^2$	$m_2 = - \ell/3$ $m_2 = - 2/3$			
C-D	$M_0 = q\ell^2$	$m_2 = - 2/3\,\ell$			

A-B	$m_1 = - 2/3\,\ell$	$m_1 = - 2/3\,\ell$			$\delta_{11} =$
B-C	$m_1 = - 2/3\,\ell$ $m_1 = -$	$m_1 = - 2/3\,\ell$ $m_1 = - \ell/3$			
C-D	$m_1 = - \ell/3$	$m_1 = - \ell/3$			

A-B	$m_1 = - 2/3\,\ell$	$m_2 = - \ell/3$			$\delta_{12} =$
B-C	$m_1 = - 2/3\,\ell$ $m_1 = -$	$m_2 = - \ell/3$ $m_2 = - 2/$			
C-D	$m_1 = - \ell/3$	$m_2 = - 2/3\,\ell$			

A-B	$m_2 = - \ell/3$	$m_2 = - \ell/3$			$\delta_{22} =$
B-C	$m_2 = - \ell/3$ $m_2 =$	$m_2 = - \ell/3$ $m_2 = - 2/3$			
C-D	$m_2 = - 2/3\,\ell$	$m_2 = - 2/3\,\ell$			

Résolution du système :

Proposition par substitution.

$$\begin{cases} \Delta_{10} + X_1 \, . \, \delta_{11} + X_2 \, . \, \delta_{12} = 0 \\ \Delta_{20} + X_1 \, . \, \delta_{21} + X_2 \, . \, \delta_{22} = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad X_1 = -\frac{1}{\delta_{11}} \left(\Delta_{10} + X_2 \, . \, \delta_{12} \right)$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} - X_2 \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}$$

$$\Delta_{20} \overbrace{- \frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} \delta_{21} - X_2 \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} \delta_{21}} + X_2 \, . \, \delta_{22} = 0 \longrightarrow X_2 = \frac{-\left(\Delta_{20} - \dfrac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} \Delta_{21} \right)}{- \dfrac{\delta_{12}}{\delta_{11}} \delta_{21} + \delta_{22}}$$

Application numérique.

ℓ = 2 m ; q = 2KN/m ; profil IPE 140

Calculez les valeurs de X1 et X2 par la méthode des forces en complétant le tableau précédent.
Vérifiez vos valeurs dans Rdm Le Mans.