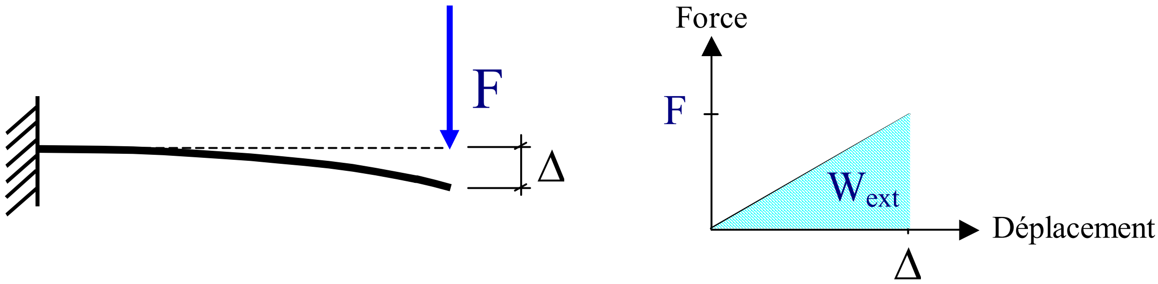
Cadre : théorie des poutres dans le plan.

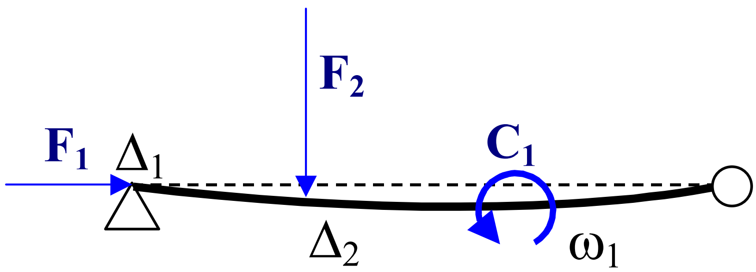
Travail d'une action mécanique extérieure : W_{ext} .



$W_{ext} = \frac{1}{2}$ **Force** x **Déplacement** du **point d'application** dans la **direction de la force**

$$W_{ext} = \frac{1}{2}(-F)(-\Delta) = \frac{1}{2} F\Delta$$

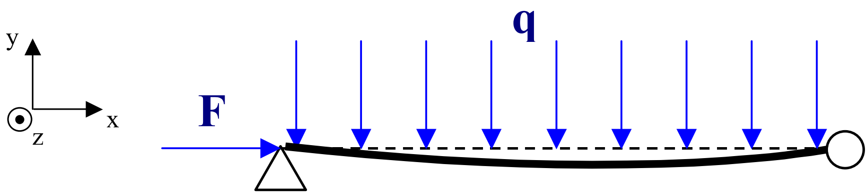
Généralisation : le théorème de Clapeyron.



$$W_{ext} = \frac{1}{2}\left(\sum_i F_i \Delta_i + \sum_j C_j \omega_j \right)$$ $\sum_i$: somme $i = 1,2,\ldots$

Energie potentielle élastique intérieure : W_{int}

Réduite aux effets de l'effort normal et du moment fléchissant et de l'effort tranchant.



$$W_{int} = \frac{1}{2}\int_{\text{somme sur la poutre}} \text{Efforts intérieurs} \times \text{Déformations associées à ces efforts}$$

$$\frac{1}{2}\int_{\text{poutre}}\left[N(x)\varepsilon(x) + V(x)\gamma(x) + Mz(x)\frac{d\omega(x)}{dx}\right]dx$$

Déformations associées

Traction/compression $\varepsilon(x) = \dfrac{N(x)}{ES}$

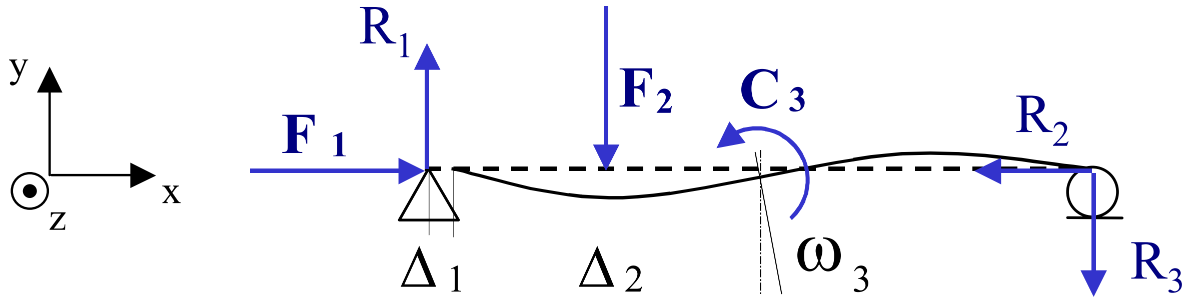
Cisaillement $\gamma(x) = \dfrac{V(x)}{GS_r'}$

Flexion $\dfrac{d\omega(x)}{dx} = \dfrac{M_z(x)}{EI}$

$$W_{int.} = \frac{1}{2}\int_{\text{poutre}}\left[\frac{N^2}{ES} + \frac{V^2}{GS_r'} + \frac{M_z^2}{EIz}\right]dx$$

Principe de conservation de l'énergie.

Réduite aux effets de l'effort normal, du moment fléchissant et de l'effort tranchant.



Les actions R_1 , R_2 , R_3 ne travaillent pas ; il n'y a pas de déplacement de leur point d'application suivant leurs directions respectives.

Travail des actions extérieures = Energie élastique intérieure

$$W_{ext.} = W_{int.}$$

$$\frac{1}{2}\left[F_1\,\Delta_1 + (-F_2).(-\Delta_2) + C_3\,\omega_3\right] = \frac{1}{2}\int_{poutre} \frac{N^2}{ES} + \frac{V^2}{GS'_r} + \frac{M^2}{EI}\; dx$$

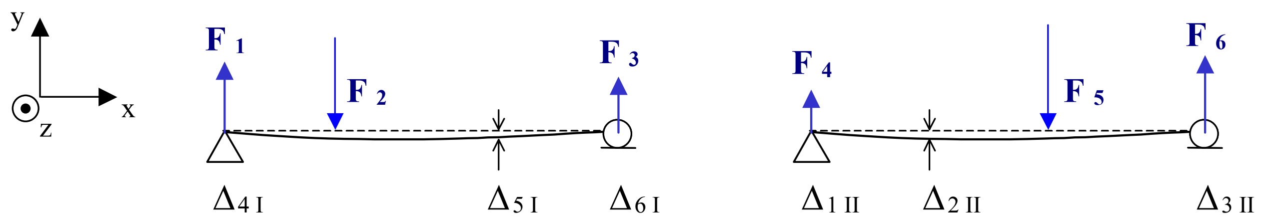
Théorème Maxwell-Betti.

« Soient deux états d'équilibre d'une ***même structure élastique****. Le travail virtuel des sollicitations extérieures du premier système dans les déplacements compatibles du second est égal au travail virtuel des sollicitations extérieures du premier système dans les déplacements compatibles du second. »*

- Illustration 1-

les chargements étant verticaux, les réactions horizontales des articulations sont nulles.

Système I **Système II**



Travail virtuel de $\mathbf{F_1}$ *dans le déplacement compatible* $\Delta_{1\,II}$ + *Travail virtuel de* $\mathbf{F_2}$ *dans le déplacement compatible* $\Delta_{2\,II}$ + *Travail virtuel de* $\mathbf{F_3}$ *dans le déplacement compatible* $\Delta_{3\,II}$ = *Travail virtuel de* $\mathbf{F_4}$ *dans le déplacement compatible* $\Delta_{4\,I}$ + *Travail virtuel de* $\mathbf{F_5}$ *dans le déplacement compatible* $\Delta_{5\,I}$ + *Travail virtuel de* $\mathbf{F_6}$ *dans le déplacement compatible* $\Delta_{6\,I}$

Propriétés :

$\Delta_{1\,II} = 0$ $\Delta_{3\,II} = 0$ $\Delta_{4\,I} = 0$ $\Delta_{6\,I} = 0$

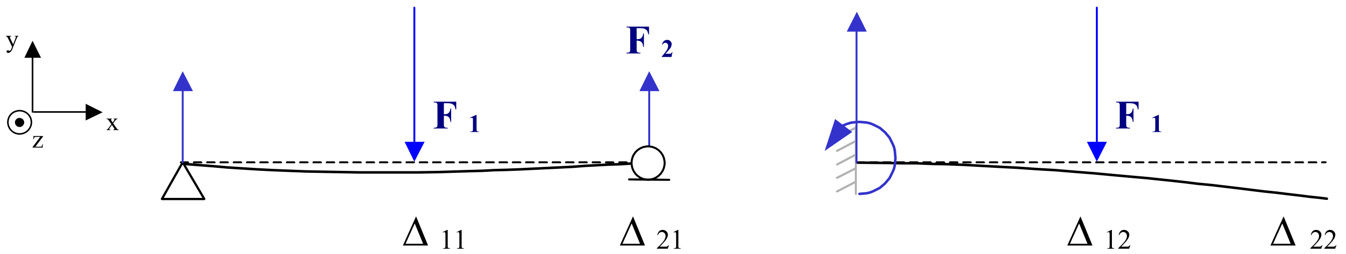
Il vient alors :

$$0 \quad + \quad \frac{1}{2}(-F_2).(-\Delta_{2\,II}) \quad + \quad 0 \quad = \quad 0 \quad + \quad \frac{1}{2}(-F_5).(-\Delta_{5\,I}) \quad + \quad 0$$

$$\text{soit : } \frac{1}{2}F_2.\Delta_{2\,II} = \frac{1}{2}F_5.\Delta_{5\,I}$$

Illustration 2 –

Système 1 **Système 2**

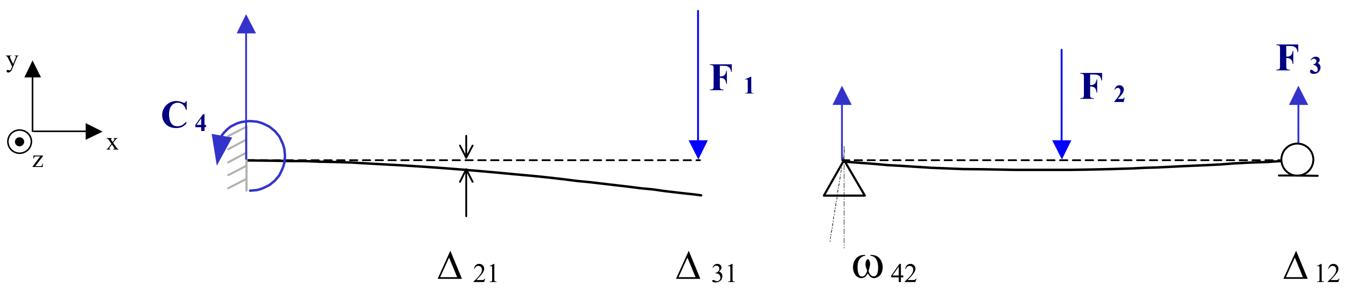


$$\frac{1}{2}\left[(-F_1).(-\Delta_{12})+(+F_2).(-\Delta_{22})\right]=\frac{1}{2}(-F_1).(-\Delta_{11})$$

$$F_2=\frac{F_1}{2} \qquad \text{alors} \quad \frac{1}{2}\left[F_1\Delta_{12}\ -\ \frac{F_1}{2}\Delta_{22}\right]=\frac{1}{2}F_1\Delta_{11}$$

- Illustration 3 –

Système 1 **Système 2**

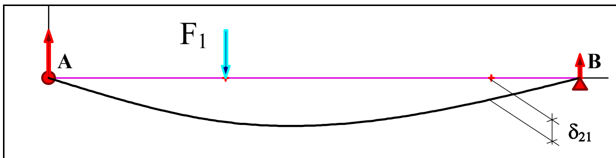


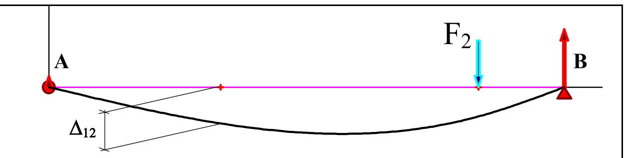
$$\frac{1}{2}\left[(-F_1).(-\Delta_{12})+(+C_4).(-\omega_{42})\right]=\frac{1}{2}\left[(-F_2).(-\Delta_{21})+F_3.(-\Delta_{31})\right]$$

$$\text{avec}\ \ \Delta_{12}=0 \quad \text{et} \quad F_3=\frac{F_2}{2}$$

$$\text{soit :} \qquad -C_4\,\omega_{42}=F_2\Delta_{21}+\frac{F_2}{2}.(-\Delta_{31})$$

Théorème Maxwell-Betti : validation numérique.





Chargement F_1 = **1 KN unitaire**

Déplacements nodaux [mm, rad]

Noeud	dx	dy	rotz
A	0.000E+00	0.000E+00	-1.266E-04
1	0.000E+00	-2.026E-01	-5.066E-05
2	0.000E+00	δ_{21} = **-9.814E-02**	9.181E-05
B	0.000E+00	0.000E+00	1.013E-04

Chargement F_2 = **25 KN**

Déplacements nodaux [mm, rad]

Noeud	dx	dy	rotz
A	0.000E+00	0.000E+00	-1.385E-03
1	0.000E+00	Δ_{12} = **-2.454E+00**	-9.102E-04
2	0.000E+00	-1.979E+00	1.583E-03
B	0.000E+00	0.000E+00	2.177E-03

Notations : déplacement δ_{ij} si le chargement $F_j = 1$ Unitaire

Théorème de Maxwell-Betti : résultat $F_1 \,.\, \Delta_{12} = F_2 \,.\, \Delta_{21}$

Comme F_1 est <u>*unitaire*</u> *dans le système d'unité retenu (1 KN), on obtient l'expression :*

$$\mathbf{1 \,.\, \Delta_{12} = F_2 \,.\, \delta_{21}} \qquad \text{soit : } \Delta_{12} = F_2 \,.\, \delta_{21}$$

Vérification : $1 \,.\, \Delta_{12} = 1 \times (-2.454) = -2.454$; $F_2 \,.\, \delta_{21} = 25 \times (-9.814\text{ E-02}) = -2.4535$

$$\left|\text{Ecart relatif }\%\right| = \left|\frac{-2.454 - (-2.4535)}{-2.454}\right| = 0.02\%$$

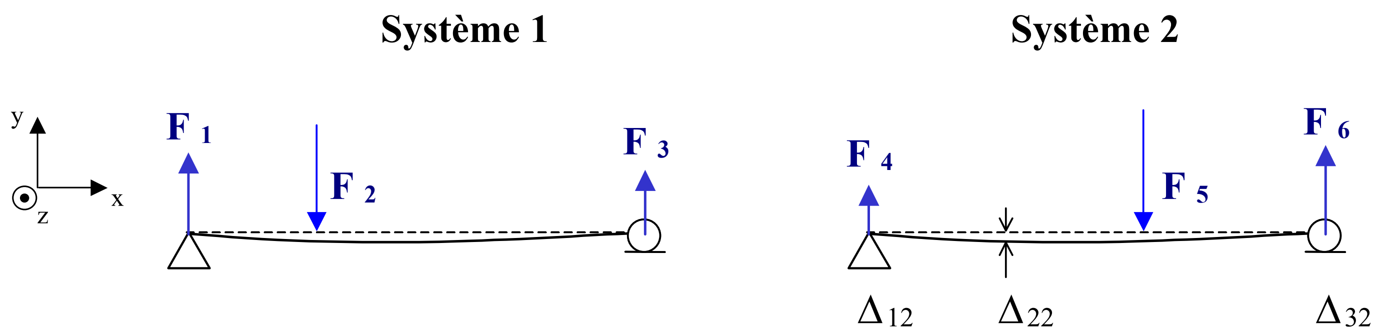
$$\delta_{21} = \frac{\Delta_{12}}{F_2}$$

s'appelle le **coefficient d'influence** de la charge F_2 au point d'application de F_1

Théorème Müller-Breslau.

« Soient deux états d'équilibre d'une ***même structure élastique****. Le travail virtuel des sollicitations extérieures du premier système dans les déplacements compatibles du second est égal à l'énergie élastique des actions intérieures du deuxième système dans les déformations élastiques du premier. »*

- Illustration 1-



$$\frac{1}{2} F_2 \Delta_{22} = \frac{1}{2} \int_{poutre} V_2(x) \frac{V_1(x)}{GS'_r} + M_2(x) \frac{M_1(x)}{EI} \, dx$$

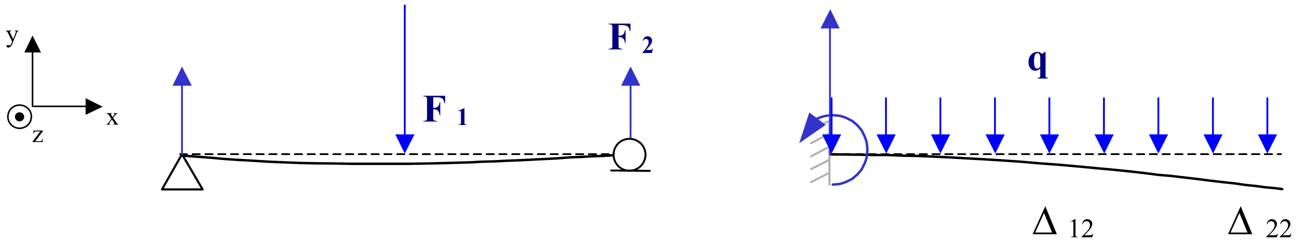
Les effort normaux n'apparaissent pas car ils sont nuls.

On pourra la plupart du temps considérer que les effets du moment fléchissant sont prépondérants devant les autres. L'expression réduite sera alors :

$$\frac{1}{2} F_2 \Delta_{22} = \frac{1}{2} \int_{poutre} M_2(x) \frac{M_1(x)}{EI} \, dx$$

- Illustration 2 – *on néglige les effets de l'effort tranchant devant ceux du moment fléchissant*

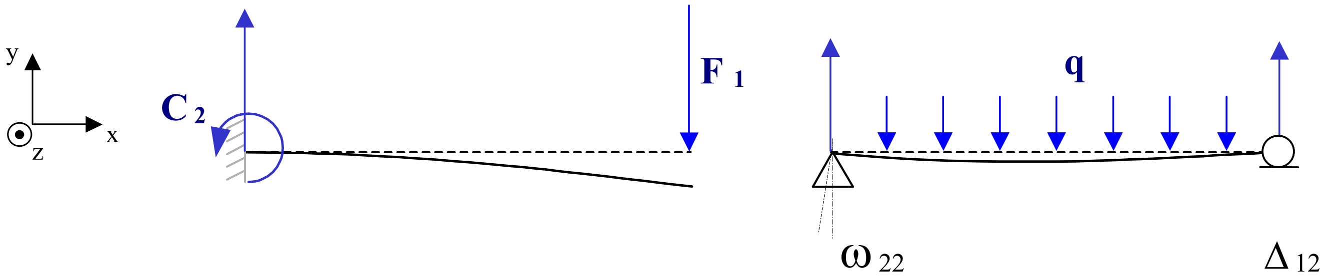
Système 1 **Système 2**



$$\frac{1}{2}\left[F_1\,\Delta_{12} - \frac{F_1}{2}\,\Delta_{22}\right] = \frac{1}{2}\int_{poutre} M_2\,\frac{M_1}{EI}\,dx$$

- Illustration 3 – *on néglige les effets de l'effort tranchant devant ceux du moment fléchissant*

Système 1 **Système 2**



$$\frac{1}{2}\left[F_1\,\Delta_{12} + C_2.(-\omega_{22})\right] = \frac{1}{2}\int_{poutre} M_2\,\frac{M_1}{EI}\,dx$$

avec $\Delta_{12} = 0$

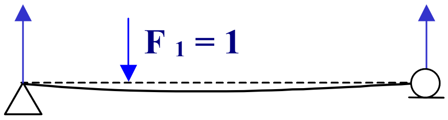
soit : $$-C_2.\omega_{22} = \int_{poutre} M_2\,\frac{M_1}{EI}\,dx$$

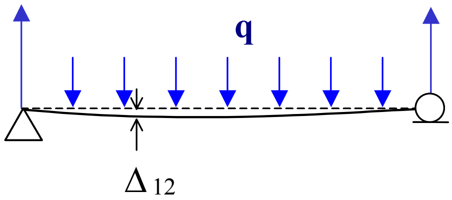
La remarque de PASTERNAK –

Application du théorème de Müller-Breslau au calcul d'une flèche quelconque sur un système.

- Illustration 1

Système 1 | **Système 2**





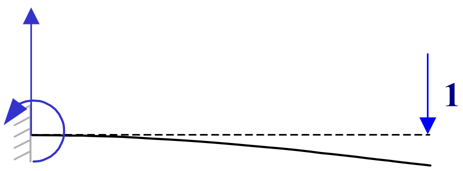
$$\frac{1}{2}\left(-F_1\right)\left(-\Delta_{12}\right)=\frac{1}{2}\int_{poutre} M_2 \frac{M_1}{EI}\,dx$$

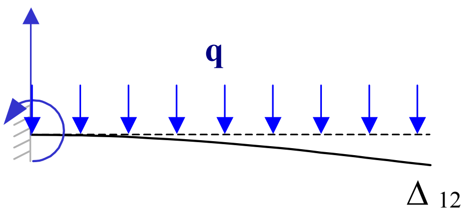
avec $F_1 = 1$ chargement unitaire

il vient $$\Delta_{12}=\int_{poutre} M_2 \frac{M_1}{EI}\,dx$$

- Illustration 2

Système 1 | **Système 2**





$$\frac{1}{2}\left(-1\right)\left(-\Delta_{12}\right)=\frac{1}{2}\int_{poutre} M_2 \frac{M_1}{EI}\,dx$$

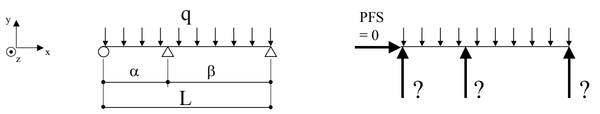
il vient $$\Delta_{12}=\int_{poutre} M_2 \frac{M_1}{EI}\,dx$$

Conclusion : *On peut déterminer la flèche d'une poutre en lui associant un système semblable par ses liaisons, doté d'un chargement unitaire au lieu de la flèche recherchée. Le problème se réduit alors au calcul de l'intégrale du produit de deux fonctions (moment fléchissant) sur la poutre :*

$$\frac{1}{EI}\int_{poutre} M_2 M_1 \,dx$$ *(en supposant* EI *indépendants de l'abscisse x)*

Méthode des forces –

- Illustration 1-



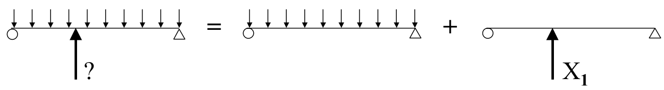
Principe Fondamental de la Statique.

$/_X$ résultat immédiat : l'action est nulle
$/_Y$ une équation homogène
$/_Z$ une équation homogène

3 relations indépendantes pour 4 inconnues de liaison

Le problème est hyperstatique extérieurement de d°1

Chargement 0 | Chargement I



- Choix d'une inconnue PRINCIPALE
(X₁ comme inconnue X n°1)

- Décomposition du système de charges

$$\Delta_1 \quad = \quad \Delta_{10} \quad + \quad \Delta_{11}$$

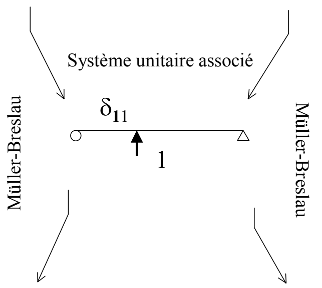
Superposition des déplacements

Cette relation en déplacements n'est pas directement utilisable dans le principe fondamental de la statique qui traite de l'équilibre (*gr. : statikos*) des actions.

$$\Delta_1 \cdot 1 \quad = \quad \Delta_{10} \cdot 1 \quad + \quad \Delta_{11} \cdot 1$$

Reformulation en une relation sur des travaux (forces unitaire. déplacements ou couples unitaire . rotations).

Système unitaire associé



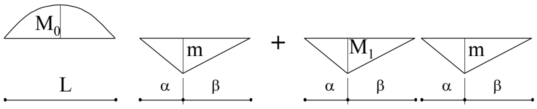
Mise en place d'un système à chargement unitaire compatible avec l'inconnue principale. Même point d'application, même direction de la charge.

$$0 \quad = \quad \frac{1}{2}\int_{\text{sur la poutre}} \frac{M_0\, m}{EI}\,dx \quad + \quad \frac{1}{2}\int_{\text{sur la poutre}} \frac{M_1\, m}{EI}\,dx$$

Application du théorème de Müller-Breslau entre les chargements 0 et I et le système unitaire.

Illustration 1 (suite)

$$0 = \frac{L}{EI}\left(\frac{1}{L}\int_{\text{sur la poutre}} M_0\, m\, dx\right) + \frac{L}{EI}\left(\frac{1}{L}\int_{\text{sur la poutre}} M_1\, m\, dx\right)$$



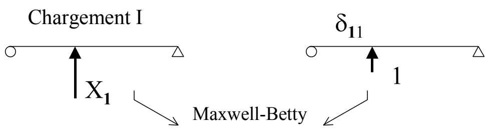
$$0 = \frac{L}{EI}\left(\frac{1}{3}M_0\, m\right) + \frac{L}{EI}\left(\frac{1}{3}M_1\, m\right)$$

$$0 = \frac{L}{EI}\left(\frac{1}{3}\frac{qL^2}{8}\frac{(-\alpha\beta)}{\alpha+\beta}1\right) + \frac{L}{EI}\left(\frac{1}{3}\frac{(-\alpha\beta)}{\alpha+\beta}X_1\frac{(-\alpha\beta)}{\alpha+\beta}1\right)$$

Calcul des sommes intégrales en utilisant Tableau des intégrales de Mohr.

On obtient ainsi une nouvelle relation indépendante pour les actions.

Il suffit alors d'injecter le résultat $X_1 = \frac{qL^2}{8}\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$ dans le système d'équations de départ (principe fondamental) pour déterminer les autres réactions.



$$-\Delta_{11}\,.\,1 = \delta_{11}\,.\,X_1$$

D'où la relation finale $-\Delta_{10}\,.\,1 = \delta_{11}\,.\,X_1$

soit encore $X_1 = -\dfrac{\Delta_{10}}{\delta_{11}}$ δ_{11} : coefficient d'influence

Autre formulation classique de X_1 .

Nous verrons par la suite que cette écriture, généralisée à plusieurs inconnues hyperstatiques, permet d'écrire un système de relations de façon quasi- automatique (formulation matricielle).